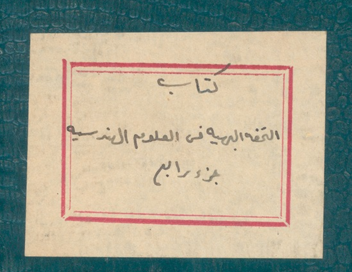
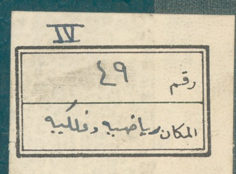

كتاب
التحفة البهية في العلوم الهندسية
جزء رابع


IV
رقم 49
المكان رياضية وفلكية

الجـــزء الرابع

من كتاب التحفة البهية فى الاصول الهندسية

(وهو مقرر لتلامذة السنة الرابعة التجهيزية)

تأليف

المرحوم احمد بك نظيم

ناظر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمة سابقا

قررت نظارة المعارف العمومية تدريس هذا الكتاب لتلامذة مدرسة التجهيزية

(الطبعة الثانية)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحمية

سنة ١٨٩٥

افرنجيه



بسم الله الرحمن الرحيم

الجزء الرابع

فى الاجسام المستديرة والقطاعات المخروطية والمنحنى البريمى

الباب الاول

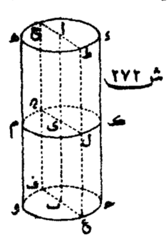
(فى الاجسام المستديرة)

الفصل الاول

(فى الاسطوانة)

(٣٣٢) الاسطوانة القائمة هى جسم يتولد من دوران مستطيل مثل ا ب ح ء حول ضلع ثابت من أضلاعه ا ب مثلا يسمى محور الاسطوانة

(شكل ٢٧٢)



ضلعا المستطيل ا ء و ب ح العمودان على المحور واللذان لا يزالان كذلك أثناء الدوران وبعده يرسمان دائرتين متساويتين مركزاهما ا و ب على المحور ومستوياهما عمودان عليه تسميان بقاعدتى الاسطوانة وأما ارتفاعها فهو المحور

حيث ان كل نقطة مثل ك من نقط ضلع المستطيل ء ح الموازي للمحور أ ب ترسم أثناء الدوران محيط دائرة مثل ك ل م ن مركزه ى على المحور ومستويه عمود عليه ونصف قطره مساو لنصف قطر القاعدة أمكن أن يقال

كل مستو يوازي قاعدة الاسطوانة فانه يقطعها في دائرة مساوية للقاعدة

وأما المستوى القاطع لها المار بمحورها فانه يقطعها في مستطيل مثل ع ط ع ف يكون ضعف المستطيل الاصلي

(٣٣٣) السطح المنحني الذي يتولد من دوران الضلع ء ح يسمى بالسطح الجانبي للاسطوانة ويمكن تصور تولد هذا السطح على وجه العموم من حركة مستقيم يتكي دائما على خط ثابت بالتوازي لاتجاه معين ويسمى المستقيم المتحرك براسم أو بمولد السطح والخط الثابت بالدليل

اذا كان الدليل مستقيما كان السطح المتولد مستويا وحينئذ يكون السطح المستوى حالة خصوصية من السطح الاسطواني

نظـــــرية

(٣٣٤) المساحة السطحية الجانبية للاسطوانة تساوي حاصل ضرب محيط قاعدتها في ارتفاعها (شكل ٢٧٣)

السطح الجانبي للاسطوانة وان كان منحنيا ولا يتيسر مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لكننا نتوصل للمطلوب باعتباره النهاية التي يقرب منها السطح الجانبي لمنشور منتظم اما مرسوم داخل الاسطوانة أو خارجها متى تزايد عدد أوجهه الى غير نهاية

غير أنه لا يكون هذا الاعتبار حقيقيا الا اذا برهنا على وجود تلك النهاية وعلى انها غير مرتبطة لا بنوع معين من أنواع المناشير المرسومة داخل الاسطوانة أو خارجها ولا بقانون تضعيف الاوجه ولذلك يقال اذا رسمنا داخل قاعدة الاسطوانة وخارجها شكلين منتظمين متحدين في عدد الاضلاع ن ومددنا من رؤس هذين المضلعين مستقيمات موازية للمحور ومنتهية بمستوى القاعدة العليا فانا نتوصل بذلك الى منشورين منتظمين أحدهما داخل الاسطوانة والثاني خارجها ثم اذا رمزنا بالرمزين حَ و حً لمحيطي الشكلين المنتظمين المذكورين وبالرمزين

س̃ و س̃̃ للسطحين الجانبيين للمنشورين وبالرمز ع لارتفاعهما المشترك تحصل

(٣٠٨ تنبيه) ان   س̃ = ح̃ ع و س̃̃ = ح̃̃ ع

لكنه حيث قد علم مما سبق انه متى ازداد ن الى غير نهاية فان ح̃ و ح̃̃ يقربان معا من نهاية مشتركة لهما محصورة دائما بين أى مقدارين متقابلين من مقدارى ح̃ و ح̃̃ وغير مرتبطة لابعدد ن ولابقانون تضعيفه وهى طول محيط الدائرة

وكذا حيث ان نهاية حاصل ضرب عدة مضاريب مساوية لحاصل ضرب نهايات مضاريبه تحصل

نهاية س̃ = نهاية ح̃ × ع ونهاية س̃̃ = نهاية ح̃̃ × ع

واذن فيكون للمقدارين س̃ و س̃̃ نهاية مشتركة س ليست مرتبطة لابعدد الاوجه ولابقانون تضعيفها وهى   س = محيط القاعدة × ع

نتيجة ـ اذا جعل س رمزا لنصف قطر محيط القاعدة يكون قانون المساحة السطحية الجانبية للاسطوانة هو س = ٢ ط س ع

نظـــــرية

(٣٣٥) المساحة الجمية للاسطوانة تساوى حاصل ضرب قاعدتها فى ارتفاعها

حجم الاسطوانة وان كان محدد السطح منحنٍ ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة الاحجام غير أنا نتوصل الى المطلوب باعتبار النهايات فننشئ داخل الاسطوانة وخارجها منشورين منتظمين متحدين فى عدد الاوجه ونرمز لحجميهما بالرمزين م̃ و م̃̃ ولقاعدتيهما بالرمزين ق̃ و ق̃̃ ولحجم الاسطوانة وقاعدتها بالرمزين م و ق ثم نقول

من المعلوم ان م أكبر من م̃ لاشتماله عليه وأصغر من م̃̃ لانحصاره فيه لكنه يحدث (٣٠٨)

م̃ = ق̃ × ع و م̃̃ = ق̃̃ × ع

فاذا ازداد عدد الاوجه فى هذين المنشورين الى غير نهاية فان ق̃ و ق̃̃ يقربان من نهاية مشتركة ق وهى قاعدة الاسطوانة وحينئذ يكون للمقدارين م̃ و م̃̃ نهاية مشتركة ق ع ويكون حجم الاسطوانة م المحصور بين م̃ و م̃̃ هو تلك النهاية ويحدث م = ق ع

نتيجة ـ اذا أبدل ق بمقداره تحصل قانون المساحة الجمية للاسطوانة وهو م = ط س٢ ع

تنبيه ـ يمكن تطبيق جميع ما ذكر من البراهين مع السهولة على أى اسطوانة مائلة قاعدتها دائرة

الفصـــــل الثـانى

(فى المخـــروط)

(٣٣٦) المخروط القائم هو جسم يتولد من دوران مثلث قائم الزاوية مثل س ا ب حول ضلع ثابت منه س ب مثلا من ضلعى القائمة يسمى محور المخروط (شكل ٢٧٤)

شر ٢٧٤

الضلع الثانى ا ب للزاوية القائمة العمودى على المحور والذى لايزال كذلك أثناء الدوران وبعده يرسم دائرة مركزها على المحور ومستويها عمود عليه تسمى بقاعدة المخروط

وأما ارتفاعه فهو المحور

حيث ان أى نقطة مثل ط من نقطة الضلع س ب ترسم محيط دائرة مثل ط ك و ى مركزها ع على المحور ومستويها عمود عليه أمكن أن يقال

كل مستو مواز لقاعدة المخروط يقطعه فى دائرة

(٣٣٧) السطح المنحنى المتولد من دوران وتر المثلث س ب يسمى بالسطح الجانبى للمخروط وأما نقطة المحور الثابتة س التى يمر بها الوتر دائما فتسمى رأس المخروط

ويمكن تصور تولد السطح المخروطى على وجه العموم من حركة مستقيم يمر دائما بنقطة ثابتة ويتكئ على خط ثابت أيضا فالمستقيم المتحرك يسمى براسم أو بمولد سطح المخروط وأما الخط الثابت فهو الدليـــل

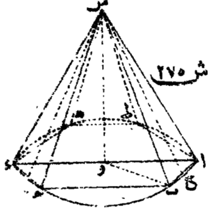
اذا كان الدليل مستقيما كان السطح المتولد مستويا وحينئذ يكون المستوى حالة خصوصية من السطح المخروطى

نظـــــرية

(٣٣٨) المساحة السطحية الجانبية للمخروط تساوى نصف حاصل ضرب محيط قاعدته فى حرفه الجانبى (شكل ٢٧٥)

ولو أن السطح الجانبى للمخروط منحن ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لكن مع ذلك نتوصل الى المقصود بواسطة اعتبار النهاية التى يقرب منها السطح الجانبى لهرم منتظم اما مرسوم داخل المخروط أو خارجه متى تزايد عدد أوجهه الى غير نهاية

لكنه لاجل أن يكون هذا الاعتبار حقيقيا يجب أن يبرهن كما سبق فى الاسطوانة على وجود تلك النهاية وانها ليست مرتبطة لا بنوع من أنواع الاهرام المرسومة داخل المخروط أو خارجه ولا بقانون تضعيف الاوجه



ولذلك يقال اذا رسمنا داخل قاعدة المخروط شكلا منتظما عدد أضلاعه ن ومحيطه حَ وخارجها شكلا آخر منتظما متحدا مع الاول فى عدد الاضلاع ومحيطه حً ثم وصل بين رأس المخروط وبين جميع رؤس هذين الضلعين بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك هرمان منتظمان أحدهما داخل المخروط والثانى خارجه وأوجه كل واحد منهما هى مثلثات متساوية ومتساوية الساقين والارتفاع المتحد المقدار فى مثلثات الهرم الاول الداخل هو س ح والارتفاع المتحد المقدار فى مثلثات الهرم الخارج هو س ا فاذا رمز بالرمزين سَ و سً للسطحين الجانبين للهرمين المذكورين تحصل على مقتضى ما تقرر بنمرة (٣١١ نتيجة ١) أن

$$سَ = \frac{1}{2} حَ \times س ح \quad , \quad سً = \frac{1}{2} حً \times س ا$$

فاذا أخذ العدد ن فى الزيادة الى غير نهاية فمن حيث ان حَ يقرب بناء على هذا الفرض من نهايته وهى محيط الدائرة التى نصف قطرها و ا وأن س ح يقرب أيضا من نهايته س ا (لان س ا ـــ س ح < ا ح فكلما أخذ ن فى الزيادة قرب ا ح من الصفر) فيقرب السطح سَ بناء عليه من نهاية س

وكذا من حيث انه بناء على الفرض المتقدم يقرب حً من عين النهاية التى يقرب منها حَ فتكون نهاية المقدارين السابقين واحدة وهى س وهى كما لا يخفى غير مرتبطة لا بعدد الاوجه ن ولا بالقانون المتبع فى زيادته الى غير نهاية ويكون مقدارها هو $\frac{1}{2}$ محيط و ا $\times$ س ا

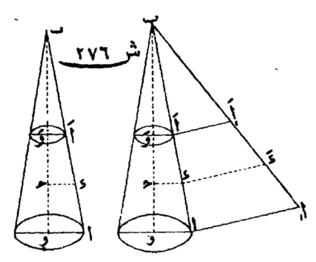
نتيجة ـ اذا رمز بالرمز س لنصف قطر القاعدة وبالرمز ا للحرف الجانبى لسطح المخروط يكون قانون المساحة السطحية الجانبية للمخروط هو س = ط س ا

تنبيه ـ اذا مد من وسط الحرف الجانبى مستو مواز قاعدته فان نصف قطر دائرة القطع يكون مساويا ضرورة الى نصف قطر القاعدة وبذلك يكون محيط القطع مساويا لنصف محيط القاعدة وبناء عليه فيمكن أخذ المساحة السطحية الجانبية للمخروط بواسطة ضرب حرفه الجانبى فى محيط الدائرة المتوسطة

نظـــــــرية

(٢٣٩) المساحة السطحية الجانبية للمخروط الناقص تساوى نصف مجموع محيطى قاعدتيه فى حرفه الجانبى (شكل ٢٧٦)

(اذا قطع المخروط بمستو موازٍ قاعدته فان جزء المخروط المحصور بين المستوى القاطع والقاعدة يسمى مخروطا ناقصا) ليكن و وَ اَ ا المخروط الناقص و ب رأس المخروط الاصلى فاذا أقيم من نقطة ا المستقيم ا ا، عمودا على ا ب فى مستو ما ثم أخذ البعد ا ا، مساويا لطول محيط و ا ووصل ب ا،



وأقيم أيضا من نقطة اَ نهاية حرف المخروط الناقص العمود اَ اَ، على ا ب ومد حتى يلاقى ب ا، فانه يتحصل من المثلثات الحادثة المتشابهة أن

$$\frac{اَ اَ،}{ا ا،} = \frac{ب اَ}{ب ا} = \frac{وَ اَ}{و ا} = \frac{محيط وَ اَ}{محيط و ا}$$

وحيث ان ا ا، مساو لمحيط الدائرة و ا يكون اَ اَ، مساويا لمحيط وَ اَ

اذا تقرر هذا يقال حيث ان مساحة المثلث ب ا ا، = $\frac{1}{2}$ ا ا، × ا ب فهو اذن يكافئ السطح الجانبى للمخروط الذى حرفه ا ب وكذلك حيث ان مساحة المثلث ب اَ اَ، = $\frac{1}{2}$ اَ اَ، × ب اَ فهو اذن يكافئ السطح الجانبى للمخروط الذى حرفه ب اَ وبناء عليه تكون مساحة شبه المنحرف ا ا، اَ، اَ مساوية لمساحة السطح الجانبى للمخروط الناقص وحيث ان مساحة شبه المنحرف تساوى نصف مجموع قاعدتيها المتوازيتين فى الارتفاع ا اَ فتكون المساحة السطحية الجانبية للمخروط مساوية لنصف مجموع محيطى قاعدتيه فى حرفه الجانبى وهو المراد

تنبيـــه — اذا مد من نقطة ء وسط الحرف ا اَ مستو موازٍ لمستويى القاعدتين فانه يحدد على سطح المخروط الناقص محيط دائرة يسمى بالمحيط المتوسط ثم اذا برهن كما سبق على أن طول هذا المحيط مساو للمستقيم المتوسط ء ءَ لشبه المنحرف ا ا، اَ، اَ ولوحظ أن ء ءَ مساو نصف مجموع قاعدتى شبه المنحرف فيكون المحيط المذكور مساويا نصف مجموع محيطى القاعدتين.

المتوازيتين للمخروط الناقص واذن تكون المساحة السطحية الجانبية للمخروط الناقص مساوية لحاصل ضرب طول المحيط المتوسط فى حرف المخروط الناقص الجانبى

نتيجة ١ - اذا رمز بالحرف س للسطح الجانبى للمخروط الناقص و ى و ىَ لنصفى قطرى القاعدتين و ح لحرفه الجانبى حدث س = ط (ى + ىَ) ح

* نتيجة ٢ - ويمكن الحصول على هذا القانون الاخير بواسطة الاعمال الحسابية فاذا دل ا
* على الحرف الجانبى للمخروط الكلى و اَ على حرف المخروط المحذوف و ح على ا ــ اَ
* حدث

* س = ط ى ا ــ ط ىَ اَ = ط (ى ا ــ ىَ اَ)

* وحيث ان

* $\frac{ا}{ى} = \frac{اَ}{ىَ} = \frac{ح}{ى - ىَ}$ يحدث $ا = \frac{ى ح}{ى - ىَ}$ و $اَ = \frac{ىَ ح}{ى - ىَ}$

* ويكون س = ط (ى + ىَ) وهو عين السابق

نظـــــــرية

(٣٤٠) المساحة الجمية للمخروط تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه (شكل ٢٧٥)
حيث ان المخروط محدد بسطح منحن ويتعذر مقارنته مباشرة بوحدة الاجسام فاننا نتوصل الى الغرض باستعمال النهايات فنقول

اذا أنشأنا داخل المخروط وخارجه هرمين م و مَ منتظمين متحدين فى عدد الاوجه وفرض أن ىَ و ىً رمزان لقاعدتيهما و ع رمز لارتفاعهما المشترك فمن المعلوم أن المخروط م يكون أكبر من مَ لاحتوائه عليه وأصغر من مً لانحصاره فيه غير أن

مَ = $\frac{1}{٣}$ ىَ × ع و مً = $\frac{1}{٣}$ ىً × ع

فاذا ضوعف فى عدد أوجه الهرمين الى غير نهاية ولوحظ ما تقدم ذكره (بنمرة ٣٣٨) من أن ىَ و ىً يقربان من القاعدة ى فيكون لحجمى الهرمين نهاية مشتركة هى $\frac{1}{٣}$ ى ع وبناء عليه تكون مساحة المخروط المحصورة دائما بين الحجمين مَ و مً هى تلك النهاية المشتركة ويكون م = $\frac{1}{٣}$ ى ع وهو المراد

نتيجة - اذا أبدلنا ى بمقداره ط ى٢ حدث م = $\frac{1}{٣}$ ط ى٢ ع

تنبيه - ماسبق ذكره من البراهين يمكن تطبيقه على أى مخروط مائل قاعدته دائرة

نظـــــــرية

(٣٤١) المساحة الجمية للمخروط الناقص تكافئ ثلاثة مخاريط متحدة معـه فى الارتفاع وقواعدها هى قاعدة المخروط الناقص والوسط المتناسب بينهما

يجب للوصول الى هـذه النظرية البرهنـة على أن المخروط النـاقص يمكن تحويله الى هرم ناقص يكافئه يكون متحدا معه فى الارتفاع وقاعدتاه تكونان مكافئتين لقاعدتى المخروط الناقص ولذلك يقال اذا رسم مثلث فى مستوى القاعدة السفلى للمخروط الناقص يكون مكافئا لها ثم وصل بين رؤسـه الثلاثة وبين رأس المخروط الكامل بمستقيمـات فانه يتشكل من ذلك هرم ثلاثى متحد مع المخروط الكلى فى الارتفاع ومكافئ له فى القاعدة فيكون مكافئا له ثم اذا مد مستوى القاعدة العليا للمخروط الناقص فانه يقطع الهرم فى مثلث يشابه مثلث القاعدة فاذا رمز بالرمزين ط و طَ لهذين المثلثين وبالرمزين ن و نَ لقاعدتى المخروط الناقص وبالرمزين ع و عَ لبعديهما عن الرأس تحصل

$$\frac{ط}{طَ} = \frac{ع^2}{عَ^2} = \frac{ن}{نَ}$$

وحيث ان ط و ن متكافئان فرضا فيكون طَ و نَ كذلك واذن فيكون الهرم الاصغر والمخروط الاصغر متكافئين وبناء عليه يكون الهرم الناقص والمخروط الناقص متكافئين أيضا وحيث ان مساحة الهرم النـاقص تساوى $\frac{1}{3}$ ح $(ط + طَ + \sqrt{ط\,طَ})$ (٣١٣ نتيجة) (بفرض أن ح يدل على ارتفـاع الهرم الناقص) فتكون مساحة المخروط النـاقص مسـاوية الى $\frac{1}{3}$ ح $(ن + نَ + \sqrt{ن\,نَ})$ وهو المراد

نتيجـــة ١ ــ اذا استعوض ن و نَ بمقداريهما يحدث

$$م = \frac{1}{3} ط\, ح\, (س^2 + سَ^2 + س\,سَ)$$

* نتيجة ٢ ــ ويمكن الوصول الى هذا القانون بطريقة حسابية فيقال حيث ان

$$\frac{ع}{س} = \frac{عَ}{سَ} = \frac{ح}{س - سَ}$$

* فاذا جعلنا $م_1$ و $مَ_1$ رمزين لجمى المخروطين الكامل والاصغر و م رمزا للفرق بينهما
* يحدث

$$م = م_1 - مَ_1 = \frac{1}{3} ط\, س^2\, ع - \frac{1}{3} ط\, سَ^2\, عَ$$

$$= \frac{1}{3} ط\, ح\, \frac{س^3 - سَ^3}{س - سَ} = \frac{1}{3} ط\, ح\, (س^2 + سَ^2 + س\,سَ)$$

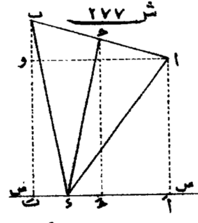
* وهو عين القانون السابق

الفصل الثالث

(فى بعض سطوح وأجسام دورانية)

فائدة

(٣٤٢) السطح المتولد من قاعدة مثلث متساوى الساقين حول محور مار برأسه يساوى حاصل ضرب محيط الدائرة التى نصف قطرها ارتفاع المثلث فى مسقط القاعدة على المحور (شكل ٢٧٧)



ليكن ا ب قاعدة المثلث المتساوى الساقين ا ء ب و ص س المحور الذى يدور المثلث حوله و اَ بَ مسقط القاعدة ا ب على المحور ص س و حَ مسقط نقطة ح وسط الضلع ا ب و ا و مستقيما موازيا للمحور فمن المعلوم ان السطح المتولد من دوران المستقيم ا ب حول المحور اما أن يكون سطحا مخروطيا كاملا أو ناقصا على حسب ماتكون نقطة ا موجودة على المحور أو متباعدة عنه وعلى كلتا الحالتين يحصل بناء على ماتقدم (٣٣٨ تنبيه و ٣٣٩ تنبيه) أن سطح

ا ب = ٢ ط ح حَ × ا ب

غير أن المثلثين المتشابهين ا و ب و ح ء حَ يؤخذ منهما أن

$$\frac{ح حَ}{ا و} = \frac{ح ء}{ا ب} \quad أو \quad \frac{ح حَ}{اَ بَ} = \frac{ح ء}{ا ب}$$

ومنه يحصل

ح حَ × ا ب = اَ بَ ح ء

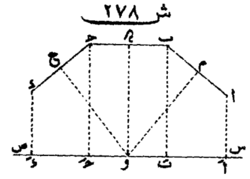
واذن يكون سطح ا ب = ٢ ط ح ء × اَ بَ وهو المراد

تنبيه ـ اذا وازى المستقيم ا ب المحور س ص تكون الفائدة بديهية

نظرية

(٣٤٣) السطح المتولد من دوران جزء من محيط شكل منتظم حول محور مار بمركزه يساوى حاصل ضرب محيط الدائرة المرسومة داخله فى مسقط جزء المضلع المذكور على المحور (شكل ٢٧٨) .

ليكن ا ب حـ ء جزء المضلع المعلوم الذى مركزه و ، س ص محور الدوران ، اَ ءَ مسقط جزء المضلع المنتظم ، و م = و ن = و ع نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فعلى مقتضى الفائدة السابقة يحصل



سطح ا ب = ٢ ط م و × اَ بَ ،
سطح ب حـ = ٢ ط ن و × بَ حـَ ،
سطح حـ ء = ٢ ط ع و × حـَ ءَ

وبجمع هذه المتساويات على بعضها يتوصل الى السطح المتولد من دوران جزء المضلع ا ب حـ ء ويحدث سطح ا ب حـ ء = ٢ ط و م × اَ ءَ وهو المراد

تنبيه ـ اذا كان جزء محيط المضلع نصف محيط مسدس منتظم وكان نصف قطر الدائرة المرسومة عليه هو س ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله هو سَ فان مساحة السطح المتولد من دورانه تساوى ٢ ط سَ × ٢ س أو = ٤ ط س سَ غير أنه لما كان سَ = س $\sqrt{٣}$ فتكون المساحة السطحية المذكورة مساوية الى ٢ ط س٢ $\sqrt{٣}$ وبمثل ما ذكر يمكن الحصول على مساحة كل سطح متولد من دوران جزء من محيط أى مضلع منتظم سبق دراسته فى الباب الثانى من الجزء الثانى

تعريف

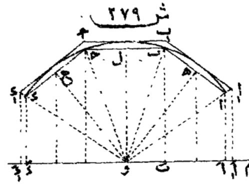
(٣٤٤) اذا اعتبرنا قوساما ا ب من نصف محيط دائرة وكان اَ بَ مسقطه على القطر وتصورنا دوران هذا القوس حول القطر المذكور فان المستقيمين ا اَ ، ب بَ المسقطين للنقطتين ا ، ب نهايتى القوس المفروض يرسمان ضرورة دائرتين عموديتين على المحور وأما القوس ا ب فانه يرسم سطحا منحنيا محصورا بين مستويى هاتين الدائرتين يسمى منطقة وحينئذ فالمنطقة هى جزء من سطح الكرة محصور بين مستويين متوازيين يسميان قاعدتيها وأما المستقيم اَ بَ الذى يقدر به البعد بين المستويين فهو ارتفاعها

اذا مر أحد نهايتى القوس ا ب بمحور الدوران بأن كان أحد المستويين المتوازيين مماسا للكرة فان المنطقة تكون ذات قاعدة واحدة وتسمى فى هذه الحالة طربوشا كرويا

واذا كبر القوس ا ب حتى بلغ نصف محيط بأن كان مستويا القاعدتين مماسين للكرة فان المنطقة تصير مساوية فى هذه الحالة لسطح الكرة

نظـــــــرية

(٣٤٥) مساحة المنطقة تساوى حاصل ضرب محيط دائرة عظيمة فى ارتفاعها (شكل ٢٧٩)



شكل ٢٧٩

ليكن ا د القوس المولد للمنطقة و اَ دَ مسقطه على المحور م ن فاذا أريد تقويم مساحة المنطقة يقال لما كان هذا السطح منحنيا ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لزمنا للوصول الى المقصود أن نسلك هنا عين ما سلكناه من قبل فنعتبره النهاية التى يقرب منها السطح المتولد من محيط جزء من شكل منتظم مرسوم اما داخل القوس المولد أو خارجه متى ضوعف فى عدد أضلاعه الى غير نهاية لكنه لاجل أن يكون هذا الاعتبار حقيقيا يجب أن نبرهن كما سبق على وجود تلك النهاية وانها ليست مرتبطة بنوع ما بالقانون المتبع فى رسم المضلعات الداخلة والخارجة

فاذا كان ا ب ح د خطا مضلعا منتظما مرسوما داخل القوس ا د عدد أضلاعه ن وكان اٍ بٍ حٍ دٍ خطا مضلعا آخر منتظما مشابها له مرسوما خارجه بواسطة مد مماسات موازية للاضلاع ا ب و ب ح و ح د و ... الخ فيكون مسقط ا ب ح د هو الخط الثابت اَ دَ كما لا يخفى وأما مسقط المضلع اٍ بٍ حٍ دٍ فهو الخط المتغير اٍَ دٍَ الذى يفرق عن المسقط اَ دَ اما بمجموع الخطين اَ اٍَ و دَ دٍَ أو بالفرق بينهما وحيث ان مسقط أى خط هو أقصر منه غالبا فيفرق اذن المسقط اَ دَ عن المسقط اٍَ دٍَ بكمية أقل من ا اٍ + د دٍ غير ان كل واحد من اَ اٍَ و دَ دٍَ أقل من الفرق و اٍ ــ و ا فيكون بداهة أقل من نصف ضلع من أضلاع المضلع الخارج واذن فيفرق اَ دَ عن اٍَ دٍَ بأقل من ضلع من أضلاع المضلع الخارج ولما كان هذا الفرق يزداد قربا من الصفر كلما زيد فى تضعيف عدد الاضلاع فتكون اذن نهاية اٍَ دٍَ هى اَ دَ

اذا تقرر هذا وجعلنا س رمزا لنصف قطر الدائرة الراسمة للمنطقة و سَ لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل المضلع المنتظم ا ب ح د و سَ رمزا للسطح المتولد من هذا الخط المضلع المذكور و سً رمزا للسطح المتولد من محيط جزء المضلع المنتظم اٍ بٍ حٍ دٍ تحصل على مقتضى النظرية السابقة ان

$$سَ = ٢ ط سَ \times اَ دَ \quad و \quad سً = ٢ ط س \times اٍَ دٍَ$$

ومتى زيد فى العدد ن الى غير نهاية فان سَ و سً يقربان من نهايتهما المشتركة ٢ ط س أ ءَ المحصورة بينهما الغير المرتبطة بالقانون الذى اتبع فى رسم المضلعات المنتظمة الداخلة والخارجة الآخذ عدد أضلاعهما فى الزيادة وحيث ان تلك النهاية هى المنطقة فتكون مساحتها تساوى ٢ ط س × أ ءَ = ٢ ط س ع وهو المراد

نتيجة – فى كرة واحدة أو فى كرات متساوية النسبة بين أى منطقتين كالنسبة بين ارتفاعيهما

نظـــــرية

(٣٤٦) المساحة الجمية للجسم المتولد من دوران مثلث حول محور خارج عنه وموجود معه فى مستو واحد ومارّ بأحد رؤسه تساوى حاصل ضرب السطح المتولد من الضلع المقابل لتلك الرأس فى ثلث الارتفاع المقابل له

الحالة الاولى (شكل ٢٨٠)

نفرض أولا ان أحد أضلاع المثلث ب ح مثلا منطبق على المحور فننزل من النقطتين ح , ا العمودين ح ع و ا ء فالجسم المتولد من دوران المثلث ح ا ب يتركب ضرورة من مخروطين ويحدث

جم ح ا ب = جم ح ا ء + جم ء ا ب

$= \frac{1}{3}$ ط ا ءَ٢ (ح ء + ء ب) $= \frac{1}{3}$ ط ا ءَ٢ × ح ب

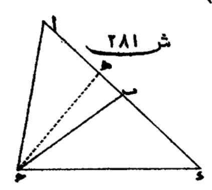
لكنه حيث كان الحاصلان ح ب × ا ء , ا ب × ح ع متساويين لدلالة كل واحد منهما على شئ واحد وهو ضعف مساحة المثلث ا ب ح أمكن أن يوضع

جم ح ا ب $= \frac{1}{3}$ ط ا ء × ا ب × ح ع

ومن جهة أخرى حيث ان السطح المتولد من دوران الضلع ا ب هو سطح مخروطى ومساحته تساوى ط ا ء × ا ب فبالاستعواض يحدث

جم ح ا ب = سطح ا ب × $\frac{1}{3}$ ح ع وهو المراد

الحالة الثانية (شكل ٢٨١)



نفرض ان الضلع ب ح غير منطبق على المحور وانما امتداد الضلع ا ب المقابل للرأس ح يقابله فى نقطة ء فيكون الجسم المتولد من دوران المثلث ا ب ح مساويا فى هذه الحالة للفرق بين الجسمين المتولدين من دوران المثلثين ح ا ء , ح ب ء ويحدث

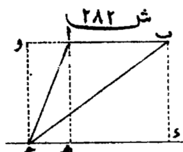
جم ا ب ح = جم ح ا ء ــ جم ح ب ء

= سطح ا ء × ١/٣ هـ ح ــ سطح ب ء × ١/٣ هـ ح

= سطح ا ب × ١/٣ هـ ح وهو المطلوب

الحالة الثالثة (شكل ٢٨٢)

نفرض ان الضلع ا ب المقابل للرأس ح موازٍ للمحور ففى هذه الحالة لا يتأتى تطبيق البرهنة المتقدمة لعدم موافقتها غير أنه يحدث



جم ا ب ح = جم ا ح هـ + جم ا هـ ء ب

ــ جم ح ب ء ويكون

جم ا ب ح = ١/٣ ط ح و² × ح هـ + ط ح و² × هـ ء

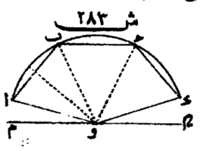
ــ ١/٣ ط ح و² × ح ء أو

= ١/٣ ط ح و² (ح هـ + ٣ هـ ء ــ ح ء) = ١/٣ ط ح و² × ٢ هـ ء

= ٢ ط ح و × هـ ء × ١/٣ ح و = سطح ا ب × ١/٣ ح و وهو المراد

نظـــــرية

(٣٤٧) مساحة الجسم المتولد من دوران قطاع قاعدته خط مضلع منتظم تساوى حاصل ضرب السطح المتولد من قاعدته مضروبا فى ثلث نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ٢٨٣)



ليكن ا ب ح ء الخط المضلع المنتظم قاعدة القطاع و ء ا , و هـ نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فانه يمكن تحليل القطاع المذكور الى جملة مثلثات متساوية

الساقين ومتساوية وعلى مقتضى النظرية المتقدمة تحصل المساحة الجمية المتولدة من كل واحد منها وحاصل جمعها يدل على المساحة الجمية المطلوبة

$$\text{حجم و ا د} = \text{سطح ا ب} \times \frac{1}{3}\text{ هـ و} + \text{سطح ب حـ} \times \frac{1}{3}\text{ هـ و}$$
$$+ \text{سطح حـ د} \times \frac{1}{3}\text{ هـ و} = \text{سطح ا ب حـ د} \times \frac{1}{3}\text{ هـ و} \quad \text{وهو المراد}$$

نتيجة ـ المساحة الجمية للجسم المتولد من دوران نصف مسدس منتظم حول قطره تكون بناء على ماذكر

$$\text{م} = \text{سطح ا ب حـ د} \times \frac{1}{3}\text{ س}' = 2\text{ ط س}' \sqrt{3} \times \frac{1}{2}\text{ س} \sqrt{3} = \text{ط س}^3$$

وبمثل ماذكر يسهل الحصول على مساحة كل جسم متولد من دوران جزء من مضلعات أخرى منتظمة يكون معلوم فيها أحد الاضلاع ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

تعـــــريف

(٣٤٨) القطاع الكروى هو جزء من جسم الكرة متولد من دوران قطاع دائرى فهو متكئ اذن على منطقة

اذا آل القطاع الدائرى الى نصف دائرة فان القطاع الكروى يكون مساويا لجسم الكرة

نظـــــرية

(٣٤٩) المساحة الجمية للقطاع الكروى تساوى حاصل ضرب المنطقة قاعدته فى ثلث نصف القطر (شكل ٢٨٣)

وللوصول الى ذلك يقال ولو أنه يتعذر مقارنته مباشرة بوحدة الاحجام لانه محدد بسطح منحن لكنا مع ذلك نتوصل الى الغرض باستعمال النهايات

فنرسم داخل القوس ا د خطا مضلعا منتظما ا ب حـ د عدد أضلاعه ن ونرسم آخر خارجه مشابها للاول ا' ب' حـ' د' (ولم يرسم منهما الا الداخل فقط) ثم نجعل م' رمزا للحجم المتولد من ا ب حـ د ، م'' رمزا للحجم المتولد من ا' ب' حـ' د' و م رمزا للحجم المتولد من القطاع ثم نقول

ان الجم م أكبر من الجم م' لاشتماله عليه وأصغر من الجم م'' لانحصاره فيه لكنه يحدث على مقتضى النظرية السابقة ان

$$\text{م}' = \text{سطح ا ب حـ د} \times \frac{1}{3}\text{ و هـ} \quad ، \quad \text{م}'' = \text{سطح ا' ب' حـ' د'} \times \frac{1}{3}\text{ و ا}$$

وقد سبق البرهنة على أن السطحين المتولدين من ا ب ح ء و ا ب ح ء لهما نهاية مشتركة وهى المنطقة وكذا علم مما تقدم أيضا ان نهاية و هـ هى و ا فيكون اذن للقدارين مَ و مً نهاية مشتركة وحيث ان م محصور بينهما فيكون هو تلك النهاية و يحدث

م (القطاع الكروى) = المنطقة قاعدته × ⅓ س وهو المراد

نتيجـــة ـ اذا أبدلت المنطقة بمقدارها المتقدم (٣٤٥) يحدث

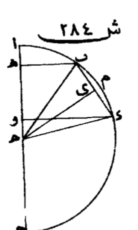
م = ⅔ ط س² ع (ع ارتفاع المنطقة)

تعـــــريف

(٣٥٠) الحلقة الكروية هى جزء من جسم الكرة تتولد من دوران قطعة دائرية محصورة بين قوس ووتره

نظـــــرية

(٣٥١) المساحة الجمية لحلقة كروية تساوى سدس الدائرة التى نصف قطرها وتر القطعة مضروب فى مسقط هذا الوتر على محور الدوران (شكل ٢٨٤)



ليكن ب م ء القطعة الدائرة حول المحور ا ع وليكن ب ء وترها و هـ و مسقطه على المحور فمن المعلوم ان الجسم المتولد من القطعة مساو للفرق بين الجسمين المتولد أحدهما من القطاع حـ ء م ب وثانيهما من المثلث حـ ء ى ب غير أن

جم حـ ء م ب = ⅔ ط س² × هـ و (٣٤٩) و

جم حـ ء ى ب = ⅔ ط $\overline{\text{حـ ى}}^2$ × هـ و (٣٤٦)

وباجراء الطرح يحدث

جم ب م ء = ⅔ ط (س² ــ $\overline{\text{حـ ى}}^2$) هـ و = ⅔ ط $\overline{\text{ب ى}}^2$ × هـ و

= ⅙ ط $\overline{\text{ب ء}}^2$ × هـ و وهو المراد

الفصـــــل الرابع
(فى الكـــرة)

نظـــــرية

(٣٥٢) المساحة السطحية للكرة تساوى أربع دوائر عظام
وللبرهنـة على ذلك يقال حيث انه تقـدم (بنمـرة ٣٤٤ تعريف) أن المنطقة تؤل الى سطح الكرة متى آل القوس المولد لها الى نصف محيط دائرة أو آل ارتفاعها الى قطر الكرة فاذا أبدل فى قانون المنطقة ٢ ط س × ع (٣٤٥) الارتفاع ع بالمقدار ٢ س تحصل سطح الكرة = ٢ ط س × ٢ س = ٤ ط س٢ وهو المراد
* نتيجة ــ حيث قد علم مما سبق ان المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث هو ثمن الكرة
* (٢٦٩ نتيجة) فتكون مساحته تساوى ½ ط س٢ أعنى نصف دائرة عظمية
* تنبيه ــ حيث ان مساحة المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث قد علمت بالنسبة للمربع
* المأخوذ وحدة فيتيسر اذن معرفة النسبة الكائنة بين مساحة أى مضلع كروى و بين هـذا
* المربع متى علمت زواياه

نظـــــرية

(٣٥٣) المساحة الحجمية للكرة تساوى أربعـة أثلاث النسبـة ط فى مكعب نصف قطرها أو تساوى سدس النسبة فى مكعب قطرها
وللبرهنـة على ذلك يقال حيث انه تقـدم (بنمـرة ٣٤٨) ان القطاع الكروى يؤل الى جسم الكرة متى آل القطاع الدائرى المولد له الى نصف دائرة وفى هذه الحالة تؤل المنطقة قاعدته الى سطح الكرة وبناء عليه اذا أبدل فى قانون القطاع المنطقة بسطح الكرة تحصل
حجم الكرة = سطح الكرة × ⅓ س = ٤ ط س٢ × ⅓ س = ⁴⁄₃ ط س٣ او = ⅙ ط ق٣
وهو المراد

* تعـــــريف

* (٣٥٤) الضلع الكروى هو جزء من جسم الكرة محصور بين نصفى دائرتين عظيمتين وكل
* ضلع كروى تكون قاعدته شقة

* نظـــــــرية

* (٣٥٥) مساحة الضلع الكروى تساوى حاصل ضرب الشقة قاعدته فى ثلث نصف القطر
* وللبرهنــة على ذلك يقال اذا جعــل ١ رمزا لزاوية الضــلع الكروى منسوبة الى الزاوية
* القائمة فانه يحدث بداهة أن

* $\frac{\text{الضلع الكروى}}{\text{حجم الكرة}} = \frac{١}{٤ \text{ قائمة}}$ أو

* الضلع الكروى $= \frac{٤}{٣}$ ط س^٣ × $\frac{١}{٤ \text{ قائمة}}$ = ٤ ط س^٢ × $\frac{١}{٤ \text{ قائمة}}$ × $\frac{س}{٣}$

* لكن المقدار ٤ ط س^٢ × $\frac{١}{٤ \text{ قائمة}}$ أو سطح الكرة × $\frac{١}{٤ \text{ قائمة}}$ يدل بداهة على سطح الشقة
* فتكون مساحة الضلع الكروى مساوية الى الشقة × $\frac{س}{٣}$ وهو المطلوب

* تعــــــريف

* (٣٥٦) اذا وصــل بين مركز الكرة ورؤس مضــلع كروى بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك
* مايسمى بالهرم الكروى

* نظـــــــرية

* (٣٥٧) المساحة الجمية للهرم الكروى تساوى حاصــل ضرب سطح قاعدته فى ثلث نصف
* قطر الكرة

* الحالة الاولى ـ اذا كان الهرم ثلاثيا فانه يسهل البرهنة
* أولا ـ على أن الهرمين الثلاثيين المتماثلين متكافئان لامكان تركبهما من اهرامات ثلاثية
* متساوية ذات الوجهين المتساويين كما أجرى ذلك فى المثلثين الكرويين
* ثانيا ـ على أنه اذا تقاطع دائرتان عظيمتان فى نصف كرة واحدة فالهرمان الحادثان اللذان
* فيهما زاويتان زوجيتان متساويتان مشتركتان فى الحرف يكون مجموعهما مساويا لضلع
* الكرة المنسوبة اليه احدى الزاويتين الزوجيتين المذكورتين لان الهرم المماثل لاى الهرمين
* المذكورين يكمل ضلع الكرة الذى يكون الهرم الثانى جزأ منه

* اذا تقرر هذا وأعيدت البراهين التى سبق ايرادها عند تقويم المساحة السطحية للمثلث
* الكروى (٢٧٦) على الهرم الثلاثى الكروى تحصل

$$\text{هرم ثلاثى كروى} = \frac{\text{ضلع ا} \times \text{ضلع ب} + \text{ضلع ح}}{٢} - \frac{١}{٤} \text{ كرة}$$

* وعلى ماتقرر (بنمرة ٣٥٥) يحدث

* $$\text{هرم ثلاثى كروى} = \left(\frac{\text{شقة ا} + \text{شقة ب} + \text{شقة ح} - \text{شقة قائمة}}{٢}\right) \times \frac{\text{س}}{٣}$$

* وحيث ان الكمية الموجودة بين القوسين تدل على مساحة المثلث الكروى قاعدة الهرم
* الثلاثى (٢٧٦) يحدث

* $$\text{هرم ثلاثى كروى} = \text{القاعدة} \times \frac{\text{س}}{٣} \quad \text{وهو المطلوب}$$

* الحالة الثانية ـ اذا كان الهرم أيا كان فانه يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية وبأخذ
* مسائحها وضمها الى بعضها يتوصل الى المطلوب

* نتيجة ـ اذا وصل بين مركز الكرة وجميع نقط دائرة صغيرة بمستقيمات تكون من ذلك
* مايسمى بالمخروط الكروى
* ويسهل البرهنة بطريق النهايات على أن المساحة الجمية له تساوى حاصل ضرب قاعدته
* فى ثلث نصف القطر

نظـــــــرية

(٣٥٨) المساحة الجمية للقطعة الكروية تساوى مساحة الكرة التى قطرها ارتفاع القطعة زائدا مساحة الجسم الاسطوانى المتحد مع القطعة فى الارتفاع وقاعدته نصف مجموع قاعدتى القطعة (شكل ٢٨٥)

لبكن المطلوب تقويم المساحة الجمية المتولدة من دوران شبه المنحرف هـ ب م ى و الذى أحد أضلاعه منحن حول المحور هـ و وعمل لذلك ب ا موازيا للمحور فالجم المطلوب يكون مساويا ضرورة لمجموع الجمين المتولد أحدهما من القطعة الدائرية ب م ى وثانيهما من شبه المنحرف هـ ب ى و فيحدث

شكل ٢٨٥

$$\text{حجم ب م ى} = \frac{١}{٦} \text{ط} \overline{\text{ب ى}}^{٢} \times \text{هـ و} \quad (٣٥١) \quad \text{و}$$

$$\text{حجم هـ ب ى و} = \frac{١}{٣} \text{ط} \left(\overline{\text{ب هـ}}^{٢} + \overline{\text{ى و}}^{٢} + \text{ب هـ} \times \text{ى و}\right) \text{هـ و} \quad (\text{٣٤١ نتيجة ١})$$

وبالجمع يحدث

$$\text{حجم القطعة} = \frac{1}{6} ط (\overline{ب ى}^2 + ٢ \overline{ب هـ}^2 + ٢ \overline{ى و}^2 + ٢ ب هـ \times ى و) \times هـ و$$

ويؤخذ من المثلث القائم الزاوية ب ا ى أن

$$\overline{ب ى}^2 = \overline{هـ و}^2 + (ى و - ب هـ)^2 = \overline{هـ و}^2 + \overline{ى و}^2 + \overline{ب هـ}^2 - ٢ ى و \times ب هـ$$

وباستعواض $\overline{ب ى}^2$ من القانون السابق بما يساويه يحدث

$$\text{حجم القطعة} = \frac{1}{6} ط (\overline{هـ و}^2 + ٣ \overline{ى و}^2 + ٣ \overline{ب هـ}^2) \times هـ و$$

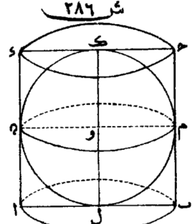
ومع التحليل والاختصار يحدث

$$\text{حجم القطعة} = \frac{1}{6} ط \overline{هـ و}^3 + \frac{1}{2} ط (\overline{ى و}^2 + \overline{ب هـ}^2) هـ و \quad \text{وهو المراد}$$

نتيجـــة ـ اذا انعدمت احدى القاعدتين بأن كانت القطعـــة ذات قاعدة فقط فان المساحة الجمية لها تساوى الكرة التى قطرها ارتفاع القطعة زائدا نصف الاســطوانة المتحدة مع القطعة فى القاعدة والارتفاع

نظـــــــــرية

(٣٥٩) نســبة سطح الكرة الى السطح الكلى للاسطوانة المرسومة عليها كالنســبة بين العددين ٢ و ٣ والنســبة بين حجميهما كالنســبة بين العــددين المذكورين (شكل ٢٨٦)



ليكن م ل ن ك دائرة عظيمــة , ا ب ح ى مربعا مرسوما خارجهــا وتصورنا دوران كل من نصــف الدائرة ونصف المربع حول المحور ك ل فانه عندما ترسم نصف الدائرة الكرة يرسم نصف المربع الاسطوانة

برهان الاول ـ حيث ان قاعدة الاســطوانة مساوية دائرة عظيمة وارتفاعها مساو لقطر الكرة فتكون مساحتها السطحية الجانبية مساوية الى ٤ ط س² ويضم الى ذلك مساحة القاعدتين أو ٢ ط س² تكون المساحة الكلية لسطح الاسطوانة مساوية الى ٦ ط س² واذن يكون

$$\frac{\text{سطح الكرة}}{\text{سطح الاسطوانة}} = \frac{٤ ط س^2}{٦ ط س^2} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

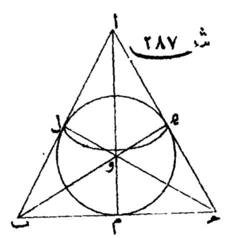
برهان الثانى ـ يقال ان المساحة الحجمية للاسطوانة تساوى ط س٢ × ٢ س = ٢ ط س٣ والمساحة الحجمية للكرة تساوى $\frac{٤}{٣}$ ط س٣ ويكون

$$\frac{\text{الكرة}}{\text{الاسطوانة}} = \frac{٤}{٣} : ٢ = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$ وهو المراد

تنبيه ـ اذا تصورنا جسما كثير السطوح مرسوما على الكرة أى أن جميع أوجهه مماسة لسطحها فان حجمه يتركب من اهرامات تكون رؤسها بمركز الكرة وقواعدها الاوجه المختلفة لكثير السطوح وأما ارتفاعها المشترك فهو مساو لنصف قطر الكرة واذن فيكون حجم كثير السطوح مساويا لسطحه مضروبا فى ثلث نصف القطر وبناء عليه تكون النسبة بين أحجام كثيرات السطوح المرسومة على الكرة كالنسبة بين سطوحها

نظـــــرية

* (٣٦٠) نسبة سطح الكرة الى سطح المخروط المتساوى الاطراف المرسوم عليها (أى الذى قطر قاعدته مساو لراسمه) كالنسبة بين العددين ٤ : ٩ والنسبة بين حجميهما كالنسبة بين عين هذين العددين (شكل ٢٨٧)



* ليكن م ء ل دائرة عظيمة قد رسم عليها المثلث المتساوى الاضلاع ا ب حـ ثم تصورنا دوران نصف الدائرة ونصف المثلث معا حول القطر ا م فانه عند ما يرسم نصف الدائرة جسم الكرة يرسم نصف المثلث م ا حـ مخروطا متساوى الاطراف
* برهان الاول ـ من المعلوم أن السطح الجانبى للمخروط يساوى ط م حـ × ا حـ وباستعواض م حـ , ا حـ بمقداريهما س $\sqrt{٣}$ و ٢ س $\sqrt{٣}$ يكون السطح الجانبى للمخروط مساويا الى ٦ ط س٢
* واذا أضفنا الى ذلك مساحة القاعدة وهى ٣ ط س٢ يكون السطح الكلى للمخروط مساويا الى ٩ ط س٢ ويحدث

$$\frac{\text{سطح الكرة}}{\text{سطح المخروط}} = \frac{٤}{٩}$$

* وأما برهان الثانى وان كان يمكن استنتاجه من تنبيه نمرة (٣٦٠) فمع ذلك نقول ان المساحة
* الحجمية للمخروط $= \frac{١}{٣}$ ط م $\overline{\text{ح}}^{٢}$ × ام لكن $\frac{\text{ام}}{\text{اذ}} = \frac{\text{مح}}{\text{وذ}}$ أو $\frac{\text{ام}}{\text{س}\sqrt{٣}} = \frac{\text{س}\sqrt{٣}}{\text{س}}$
* أو ام = ٣ س وتكون مساحة حجم المخروط مساوية الى ٣ ط $\text{س}^{٣}$ أو $\frac{٩}{٣}$ ط $\text{س}^{٣}$
* ويحدث $\frac{\text{الكرة}}{\text{المخروط}} = \frac{٤}{٣} : \frac{٩}{٣} = \frac{٤}{٩}$ وهو المراد

الفصـــــل الخـامس

تمـــــرينـات

١ ـ المطلوب تعيين نصف قطر قاعدة اسطوانة اذا كانت مساحتها السطحية الجانبية تساوى ٠،٦٠ متر مربع وكان ارتفاعها مساويا ١،٢٠ متر

٢ ـ اذا لزم لطلاء السطح الجانبى لاسطوانة قطر قاعدتها ٠،٢٠ متر وارتفاعها ٠،٨٠ متر مقدار سنتيمترين مكعبين من الذهب والمطلوب معرفة سمك طبقة الطلاء

٣ ـ ما يؤل اليه حجم الاسطوانة اذا ضوعف ارتفاعها أو نصف قطر قاعدتها

٤ ـ اذا دل العدد ١٩،٢٦ على الثقل النوعى للذهب وأريد تصفيح عمود بصفائح من الذهب ارتفاعه يساوى ثلاثة أمتار ونصف قطر قاعدته يساوى ٠،٢٠ متر فما مقدار زنة الذهب اللازم لذلك اذا كان سمك الصفائح يعادل ٠،٠٠٠١ متر

٥ ـ المطلوب تعيين زنة الزئبق الموجود داخل اناء اسطوانى قطر قاعدته ٠،٢٠ متر وارتفاع الزئبق فيه يعادل ٠،٤٠ متر اذا كان الثقل النوعى للزئبق يعادل ١٣،٦

٦ ـ اذا كانت أنبوبة من الزجاج تزن ٨٠ غراما وهى فارغة ومتى وضع فيها زئبق بارتفاع ٠،٠٤ متر تبلغ زنتها ١٤٠ غراما والمطلوب معرفة قطر قاعدة الانبوبة اذا كان الثقل النوعى للزئبق يعادل ١٣،٥٩٨

٧ ـ اذا قطع مخروط ارتفاعه متران ومساحة قاعدته متر مربع بمستو مواز قاعدته على بعد ٠،٨٠ متر من رأسه والمطلوب معرفة سطح القطع

٨ ـ على أى بعد من رأس مخروط ارتفاعه متران ونصف قطر قاعدته ٠،٤٠ متر يجب قطعه بمستو مواز قاعدته ليكون نصف قطر القطع مساويا ٠،٣٠ متر

٩ ـ ما يؤل اليه حجم مخروط اذا ضوعف ارتفاعه أو نصف قطر قاعدته

١٠ ـ اذا كان حجم المخروط يساوى ٦٠ مترا مكعبا وارتفاعه يساوى ثمانية أمتار والمطلوب حساب سطحه الجانبى

١١ ـ اذا كان نصف قطر قاعدة مخروط يساوى مترين وضلعه يساوى ثمانية أمتار والمطلوب حساب حجمه

١٢ ـ اذا قطع مخروط ارتفاعه خمسة أمتار بمستو مواز قاعدته على بعد مترين من رأسه وكان نصف قطر القطع الحادث مساويا ٠٫٤٠ متر والمطلوب حساب حجمه

١٣ ـ اذا قطع مخروط ارتفاعه ستة أمتار ومساحته الحجمية عشرة أمتار مكعبة بمستو مواز قاعدته على بعد مترين من رأسه والمطلوب حساب السطح الجانبى للمخروط الناقص

١٤ ـ على أى بعد من رأس مخروط حجمه يساوى ٣٨٧ مترا مكعبا وارتفاعه ٢٫٠ مترا يجب قطعه بمستو مواز قاعدته لتكون المساحة الحجمية للمخروط المحذوف مساوية ٩٥ مترا مكعبا

١٥ ـ اذا كان ارتفاع مخروط ناقص مترين ونصف قطر قاعدته السفلى ٧٫٣٠ متر ونصف قطر قاعدته العليا ٣٫٥٠ متر والمطلوب حساب السطح الجانبى للمخروط الكامل وحجمه

١٦ ـ المطلوب حساب السطح الحادث من دوران المستقيم ا ب = ٥ متر حول محور كائن معه فى مستو واحد وكان بعدا نهايتيه عن المحور مساويين ٣ متر و ٤ متر

١٧ ـ المطلوب حساب السطح الحادث من دوران محيط مثلث متساوى الاضلاع حول أحد أضلاعه ا ب = ٥ متر

١٨ ـ المطلوب حساب ارتفاع منطقة مساحتها تساوى دائرة عظيمة ونصف قطر الكرة التى هى جزء من سطحها مساو سبعة أمتار

١٩ ـ المطلوب حساب الحجم المتولد من دوران مثلث متساوى الاضلاع أحد أضلاعه ا ب = ٥ متر حول محور مار برأسه ومواز قاعدته

٢٠ ـ المطلوب حساب حجم القطاع الكروى اذا كانت مساحة المنطقة قاعدته تساوى مترا مربعا ونصف قطر الكرة مساويا مترا

٢١ ـ المطلوب حساب حجم المكعب المرسوم داخل الكرة التى نصف قطرها خمسة أمتار وبالعكس

٢٢ ـ ما يؤل اليه سطح الكرة وحجمها اذا ضوعف نصف قطرها

٢٣ ـ المطلوب حساب سطح الشقة التى يعادل مقدار زاويتها 28° ونصف قطر الكرة يساوى أربعة أمتار

٢٤ ـ المطلوب حساب زاوية الشقة اذا عادلت مساحتها مترا مربعا وكان نصف قطر الكرة مساويا ٤٫٥ متر مربع

الباب الثانى

(فى القطاعات المخروطية والمنحنى البرهى)

* يطلق اسم القطاعات المخروطية على القطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد

الفصل الاول

(فى القطع الناقص)

تعريفات

(٣٦١) القطع الناقص هو محل النقط التى يكون مجموع بعدى كل واحدة منها عن نقطتين ثابتتين فيه ثابت دائما (شكل ٢٨٨) النقطتان الثابتتان تسميان بالبورتين ونرمز لهما هنا بالرمزين ر و رَ

بعد أى نقطة من نقط القطع الناقص عن أى واحدة من البورتين يسمى نصف قطر بوريا ويرمز هنا لنصفى القطرين البوريين لاى نقطة بالرمزين ص و صَ

والمقدار الثابت الدال على مجموع نصفى القطرين البوريين لاى نقطة يبين هنا بالمقدار ٢ ا وأما البعد بين البورتين فيبين بالمقدار ٢ حـ

(٣٦٢) مماس القطع الناقص فى أى نقطة هو نهاية الاوضاع التى يأخذها قاطع متحرك مار بهذه النقطة وبأخرى تقرب منها شيأ فشيأ الى غير نهاية

المبحث الاول

(فى رسم القطع الناقص)

عملية

(٣٦٣) المطلوب رسم القطع الناقص

الطريقة الاولى — وهى رسمه نقطة فنقطة (شكل ٢٨٨)

لكن ر و رَ البورتين و ٢ ا المجموع الثابت , ر رَ = ٢ ح , و وسط ر رَ فنأخذ البعدين و هـ , و ط متساويين وكل منهما يساوى ا فيكون النقطتان هـ , ط من نقط القطع الناقص لان

هـ ر + هـ رَ = ط رَ + هـ رَ = ٢ ا , و
ط ر + ط رَ = ط ر + هـ ر = ٢ ا

ثم نقيم من نقطة و عمودا غير محدود على المستقيم هـ ط ونجعل احدى البورتين مركزا ونرسم محيط دائرة بنصف قطر مساو ا فيقطع العمود فى النقطتين ى و د تكونان أيضا من نقط المنحنى لان

ى ر + ى رَ = ٢ ى رَ = ٢ ا , د ر + د رَ = ٢ د رَ = ٢ ا

اذا جعل ب رمز البعد و ى حدث ا٢ = ب٢ + ح٢

ثم اذا فرضت نقطة مثل ل على المستقيم هـ ط وجعلت نقطة ر مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو ط ل وجعلت بعد ذلك نقطة رَ مركزا ورسم محيط دائرة آخر بنصف قطر مساو هـ ل فان هذين المحيطين يتقاطعان فى نقطتين م و م١ تكونان من نقط المنحنى ومتماثلتى الوضع بالنسبة للمستقيم هـ ط

ثم اذا أبدل نصفا القطرين ببعضهما مع عدم تغير المركزين فاننا نتوصل أيضا الى نقطتين جديدتين مَ و مَ١ من نقط المنحنى متماثلتى الوضع أيضا بالنسبة للمستقيم هـ ط ومماثلتين للنقطتين م و م١ بالنسبة للمستقيم ى د وباعادة مثل هذه العملية مرارا فانه يتوصل فى كل مرة الى أربع نقط من نقط المنحنى متماثلة مثنى بالنسبة لكل واحد من المستقيمين هـ ط , ى د فاذا وصلت جميع النقط المتحصلة بخط فانه يتشكل منحنى القطع الناقص المطلوب

تنبيه ١ — حيث ان جميع نقط المنحنى متماثلة مثنى بالنسبة لكل واحد من المستقيمين هـ ط , ى د فيسمى المستقيمان المذكوران من أجل ذلك بمحورى تماثل المنحنى

تنبيه ٢ — حيث ان الاضلاع المتقابلة من الشكل الرباعى م م رَ مَ١ متساوية فيكون متوازى الاضلاع وحيث ان قطريه ينصفان بعضهما فى نقطة و فتكون هذه النقطة وسطا لجميع أوتار المنحنى المارة بها ولذا تسمى هذه النقطة بمركز المنحنى

تنبيه ٣ — حيث ان انتخاب نقطة ل على المحور هـ ط يستلزم تقاطع محيطى الدائرتين اللذين مركزاهما ر و رَ فيجب أن يكون البعد بين المركزين ٢ ح أصغر من مجموع نصفى

القطرين ٢ ا وأكبر من فاضلهما أما الشرط الاول فهو محقق لان ا > ح وحينئذ فلتحقق الشرط الثانى يجب أن يكون و ل < ح أعنى انه يجب أخذ نقطة ل بين النقطتين ى و ىَ ومن هنا يعلم ان مقدار نصف القطر البورى يتغير بين المقدارين ا ــ ح و ا + ح

نتيجة ــ يمكن أن يستنتج مما ذكر أن هـ ط هو المحور الاكبر للقطع الناقص وان ى ى هو محوره الاصغر وذلك لانه يؤخذ من المثلث م ى ىَ أن

صْ + صَ' = ٢ م و' + ٢ ح' أو ٢ م و' = صْ + صَ' ــ ٢ ح' أو

٢ م و' = صْ + صَ' + ٢ ص صَ ــ ٢ ح' ــ ٢ ص صَ = ٤ م' ــ ٢ ح' ــ ٢ ص صَ

فاذا جعل ٢ ع رمزا للفرق بين نصفى القطرين البوريين أمكن أن يوضع

صَ = ا + ع و ص = ا ــ ع أو ص صَ = ا' ــ ع' واذن يكون م و' = ب' + ع'

ثم يقال حيث ان النهاية العظمى للكمية ع هى ح فتكون النهاية العظمى للمقدار م و هى ا وكذا حيث ان النهاية الصغرى للكمية ع هى صفر فتكون النهاية الصغرى للمقدار م و هى ب ولهذا يسمى هـ ط بالمحور الاكبر و ى ى بالمحور الاصغر وتسمى النقط هـ و ط و ى و ى بالرؤس

الطريقة الثانية ــ وهى طريقة رسمه دفعة واحدة

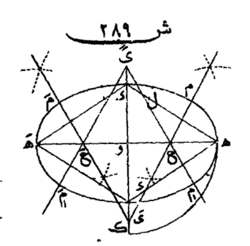
اذا أخذ خيط طوله ٢ ا وثبت طرفاه فى البورتين ى و ىَ وشد بواسطة سن قلم راسم يتحرك فانه يتشكل من ذلك القطع الناقص المطلوب

وذلك لان مجموع نصفى القطرين البوريين لكل نقطة من نقطه مساو ٢ ا وهذه طريقة يكثر استعمالها على الارض دون الرسم على الورق لعدم امكان الوصول بواسطتها الى رسم النقط المجاورة للمستقيم المار بالبورتين مع الضبط الكافى حيث انه عندما يتماس جزآ الخيط فان أحدهما لا يكون مستقيما وزيادة على ذلك فانه متى رسم نصف القطع الناقص يحتاج الامر الى رفع القلم الراسم ونقل الخيط الى الجهة الثانية للبورتين لرسم النصف الثانى منه

غير أنه يسهل تصحيح الضرر الاخير بواسطة استعمال خيط دائر طوله مساو ٢ ا + ٢ ح بان يثبت ابرتان فى البورتين و يحاط بهما الخيط المذكور و يشد شدا مناسبا بواسطة سن القلم الراسم ويحرك حتى يتم رسم القطع الناقص

نتيجة ــ اذا اتحدالبورتان ى و ىَ فان المحل الذى يرسمه القلم يكون محيط دائرة وحينئذ فالدائرة هى قطع ناقص بورتاه متحدتان

الطريقة الثالثة — وهي طريقة تقريبية (شكل ٢٨٩)
يمكن أن يتوصل بواسطة أقواس دوائر متقاطعة الى رسم شكل تقرب صورته من القطع الناقص فاذا كان وهـ = ا ، وى = ب نصفي القطرين البورين للقطع الناقص المراد رسمه يمد ى ىَ على استقامته ويؤخذ منه البعد وك = وهـ ثم يؤخذ ىل = ىَ ك = ا — ب ويقام العمود م ىَ على وسط المستقيم هـ ل ثم يعمل كذلك على المستقيم ى هـَ ويتمم بعد ذلك المعين ى ح ىَ حَ وتمد أضلاعه على استقامتها ثم تجعل كل واحدة من النقطتين ى و ىَ مركزا وبنصف قطر مساو ىَ ك يرسم قوسا الدائرتين م ى مَ و م١ ىَ مَ١ وتجعل أيضا النقطتان ح و حَ مركزين وبنصف قطر مساو ح م يرسم القوسان م م١ و مَ مَ١ فيمران تقريبا بالنقطتين هـ و هـَ ولا يكون الشكل الحادث هو القطع الناقص المطلوب وانما يفرق عنه بقليل



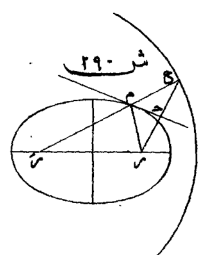
المبحث الثاني

(في بعض نظريات مهمة)

نظرية

(٣٦٤) القطع الناقص هو محل النقط المتساوية البعد عن نقط محيط دائرة وعن نقطة ثابتة فيه (شكل ٢٩٠)

لتكن م احدى نقط القطع الناقص الذي بورتاه ر و رَ وليكن ٢ ا مجموع نصفي القطرين البورين لها بحيث يكون م ر + م رَ = ٢ ا فيمد رَ م على استقامته ونأخذ عليه البعد م ح = م ر فالمستقيم رَ ح يكون مساويا ٢ ا واذن فهو ثابت المقدار وتكون نقطة ح موجودة على محيط دائرة نصف قطرها مساو ٢ ا



ومركزه ں َ وأمانقطة م فهى على بعد واحد من هذا المحيط ومن نقطة ں وهو المراد

تنبيــــه — الدائرة ں َ ح تسمى بالدائرة الدليلة للبورة ں وأما الدائرة الدليلة للبورة ں َ فهى التى مركزها ں ونصف قطرها ٢ ا

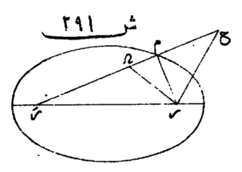
نتيجــة ١ — ينتج من هــذه النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الناقص نقطة فنقطة متى علم بورتاه ومجموع نصفى القطرين البوريين ٢ ا لانه اذا رسم بنقطة ں َ مثــلا الدائرة الدليــلة لنقطة ں ووصل بين نقطة ح مثلا احدى نقط محيط الدائرة و بين نقطة ں بمستقيم ثم اقيم العمود ح م على وسط هــذا المستقيم فانه يقابل المســتقيم ں َ ح بين ں َ و ح فى نقطة تكون احدى نقط القطع الناقص المطلوب

وسيشاهد فيما يأتى ان العمود ح م يكون مماسا لمنحنى القطع الناقص فى نقطة م وحينئذ فيكون لهذه الطريقة فائدة أخرى مهمة وهى تعيين نقطة من نقط المماس

نتيجــة ٢ — وينتج من طريقة رسم القطع الناقص هذه ان نقط المنحنى متماثلة الوضع بالنسبة لكل من المستقيمين ں ں َ والمستقيم العمودى على وسطه حيث يمكن تغيير دور البورتين

نظـــــــرية

(٣٦٥) كل نقطة مفروضة فى مستوى القطع الناقص يكون مجموع بعديها عن بورتيــه أكبر أو أصــغر من المجموع الثابت ٢ ا على حسب ماتكون هذه النقطة خارجة عن منحنى القطع الناقص أو داخلة فيه (شكل ٢٩١)



أولا — لتكن ع نقطــة خارجة عن المنحنى فنصل ع ں و ع ں َ و م ں فيحدث (٢٠ تنبيه)

ع ں + ع ں َ > م ں + م ں َ أو > ٢ ا

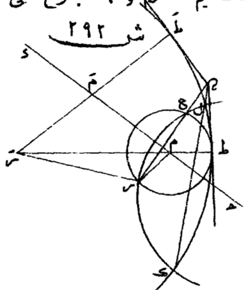
ثانيا — لتكن ں نقطة داخل المنحنى فنصل ں ں و ں ں َ ثم نمد ں ں َ على استقامته حتى يقابل القطع الناقص فى نقطة م ونصل م ں فيحدث (٢٠ تنبيه)

ں ں + ں ں َ < م ں + م ں َ أو < ٢ ا وهو المراد

عمليـــــــة

(٣٦٦) المطلوب تعيين نقط تقاطع مستقيم بمنحنى القطع الناقص الغير المرسوم (شكل ٢٩٢)

لتكن ں و ںَ بورتى القطع الناقص و ح ء المستقيم المعلوم و ٢ ا مجموع نصفى القطرين البوريين



فاذا فرض ان المسئلة محلولة وان م هى احدى نقط تقاطع المنحنى بالمستقيم بحيث يكون م ں + م ںَ = ٢ ا فمد ںَ م على استقامته بمقدار م ط = م ں وحينئذ يكون معرفة وضع نقطة ط كافيا لحل المسئلة أى لتعيين م وللوصول الى ذلك يقال

من المعلوم أولا أن هذه النقطة توجد على الدائرة الدليلة للبورة ں وثانيا انه لوجعلت نقطة م مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو م ط فان هذا المحيط يمس الدائرة الدليلة فى نقطة ط ويمر بنقطة ں وحينئذ فقد آل تعيين نقطة ط الى حل المسئلة الآتية وهى

المطلوب تمرير محيط دائرة يمر بنقطة ں المعلومة ويكون مماسا لمحيط دائرة معلومة بحيث يكون مركزه موجودا على مستقيم معلوم لكن لو عينا نقطة ع المماثلة لنقطة ں بالنسبة للمستقيم المعلوم فان هذه النقطة يجب أن تكون موجودة على المحيط ط ں واذن فقد آل الامر الى حل المسئلة الآتية وهى (١٥٦)

المطلوب تمرير محيط دائرة بنقطتين معلومتين ويمس محيط دائرة معلومة

وحل هذه المسئلة يركز فى نقطة ح الاختيارية ويرسم محيط دائرة يمر بالنقطتين ع و ں ويقطع محيط الدائرة المعلومة فى النقطتين ك و ل ثم اذا وصل ك ل ويبحث عن نقطة تقابله ﮞ بالمستقيم ں ع ثم مد منها مماسان للدائرة المعلومة فان نقطتى التماس ط و طَ يتعين بهما نقطتا تقاطع المستقيم ح ء بالمنحنى متى وصل بين كل واحدة منها والبورة ںَ بمستقيم

تنبيه — حيث ان نقطة ں هى داخل الدائرة الدليلة فلا يمكن حينئذ أن تكون المسئلة ممكنة أى لا يمكن أن يكون المستقيم ح ء قاطعا للمنحنى الا اذا كانت نقطة ع داخل الدائرة الدليلة أو على محيطها

ففى الحالة الاولى يتأتى رسم المماسين ﮞ ط و ﮞ طَ وبذلك يوجد نقطتان للتقاطع م و مَ وفى الحالة الثانية تكون نقطة ع هى نفس نقطة التماس وبذلك ينطبق المماسان على بعضهما ويتحد نقطتا التماس معا فى نقطة ع المذكورة وبناء عليه يكون المستقيم ح ء قاطعا للمنحنى فى نقطتين متحدتين معا أى مماسا له

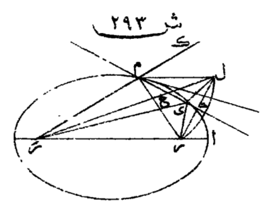
نتيجــة ــ حيث انه لايمكن أن يمد من نقطة ى الخارجة عن محيط الدائرة الامماسان له ى ط و ى طَ فلا يمكن اذن للمستقيم أن يقابل محيط القطع الناقص الا فى نقطتين وبذلك يكون القطع الناقص محدبا

المبحث الثالث

(فى تماس القطع الناقص)

نظرية

(٣٦٧) مماس القطع الناقص فى نقطة مّا ينصف الزاوية الواقعة بين أحد نصفى القطرين البوريين لنقطة التماس وامتداد نصف قطرها البورى الثانى (شكل ٢٩٣)



ليكن م ى قاطعا للمنحنى مارا بنقطة م وباخرى قريبة جدا منها فاذا عينا نقطة ل المماثلة الى ر بالنسبة للقاطع م ى ووصلنا بينها وبين نقطة رَ بالمستقيم ل رَ وكانت ع نقطة تقابل هذا المستقيم بالقاطع م ى حدث رَ ع ل = رَ ع ر

وحيث ان النقطتين م و ى ممتازتان عن بعضهما فتكون نقطة ع ممتازة بالاقل عن احداهما ى مثلا فيحدث

رَ ع ل < رَ ى ل أو رَ ع ر < رَ ى ل أو < ٢ ا

واذن فتكون نقطة ع ممتازة أيضا عن نقطة م وموضوعة داخل القطع الناقص ضرورة بين م و ى

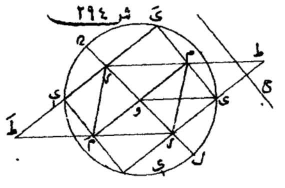
اذا تقرر هذا يقال حيث ان القاطع منصف للزاوية المتكونة من ع ر وامتداد رَ ع فاذا قربت اذن نقطة ى من نقطة م فان القاطع يقرب نحو المستقيم م ط المنصف للزاوية المتكونة من المستقيم م ر ومن امتداد رَ م وحينئذ فيكون المماس فى نقطة م الذى هو على مقتضى التعريف نهاية لاوضاع القاطع المتحرك متساوى الميل على نصفى القطرين البوريين لهذه النقطة وهو المراد

نتيجة — وينتج من ذلك أنه اذا اريد مدّ مماس لمنحنى القطع الناقص من نقطة مفروضة عليه فانه يكفي مد المستقيم المنصف للزاوية الواقعة بين أحد نصفى القطرين البوزيين لهذه النقطة وامتداد نصف قطرها الثانى

نظـــــــرية

(٣٦٨) محل مساقط بورتى القطع الناقص على مماساته هو محيط دائرة مركزه مركز القطع الناقص ونصف قطره نصف محوره الاكبر

(شكل ٢٩٤)



ليكن م نقطة تماس المستقيم ى ىَ بالقطع الناقص فاذا أنزلنا من نقطة ر العمود ر ى على المماس ى ىَ ومدّ حتى يتلاقى مع المستقيم رَ ط فان الزاوية ط م ى تكون مساوية للزاوية ى م ر كما تقدم فى النظرية السابقة ويكون المثلثان ط م ى و ى م ر متساويين لمساواة ضلع ومجاورتيه من الزوايا من أحدهما لنظائرها من الثانى واذن يكون م ط = م ر و ر ى = ط ى وبناء عليه يكون رَ ط = رَ م + م ر = ٢ أ

اذا تقرر هذا يقال حيث كانت نقطة ى وسط المستقيم ط ر ونقطة و وسط المستقيم ر رَ فيكون المستقيم ى و نصف المستقيم ط رَ أو نصف ل ق أعنى يكون مساويا للمقدار الثابت وحينئذ فيكون محل نقطة ى هو محيط دائرة مركزه و ونصف قطره نصف ل ق وهو المراد

عمليـــــــة

(٣٦٩) المطلوب مدّ مماس لقطع ناقص معلوم موازلاتجاه معلوم مع تعيين نقطة تماسه به

(شكل ٢٩٤)

ليكن الاتجاه المعلوم ع ونفرض ان المسئلة محلولة وان ى ىَ هو المماس المطلوب الموازى للاتجاه ع وان م هى نقطة التماس فنصل رَ م ونمده حتى يلاقى الدائرة الدليلة للبورة ر فى نقطة ط وحينئذ اذا تعين وضع نقطة ط فانا نتوصل الى حل المسئلة فاذا وصلنا ر ط

فان المثلثين ط م ى و ى م ن يجب أن يكونا متساويين لتساوى زاوية والضلعين المحيطين بها من أحدهما النظائر لها من الثانى واذن يكون ن ط عمودا على ى ى َ أو على ح وبناء عليه فتتعين نقطة ط بتقاطع مستقيم معين بمحيط دائرة ومتى علمت فانها تعين نقطة م أيضا فى تقاطع نَ ط مع العمود المقام على ن ط وحيث انه يوجد نقطة أخرى طَ مناظرة لنقطة ط فيوجد اذن للمسئلة حلان

تنبيـــه ـ ويمكن الوصول الى حل هذه المسئلة بالبحث عن وضع نقطة ى الكائن فى تقاطع الدائرة التى قطرها ل ق مع العمود النازل من نقطة ن على الاتجاه المعلوم ح لانه متى تعين وضعها يتعين أيضا وضع المماس ى ى َ وأما نقطة التماس فانها تتعين بواسطة مدّ ن ى حتى يقابل الدائرة الدليلة فى نقطة ط ثم وصل ط نَ وبواسطة تعيين نقطة يْ التى هى النقطة الثانية لتقابل العمود ن ط بمحيط الدائرة الذى قطره ل ق يمكن الوصول الى حل ثان للمسئلة ويمكن الوصول الى هـذا الحل الثانى اذا أجريت على البورة نَ اعمالا مثل التى اجريت على البورة ن

نتيجة ـ ومما يسهل مشاهدته هو أن نقطتى التماس موجودتان على نهايتى قطر القطع الناقص م مَ وذلك لان الشكل ن م نَ مَ متوازى الاضلاع لتساوى أضلاعه المتقابلة

عمليـــــــــة

(٣٧٠) المطلوب تقرير مماس للقطع الناقص من نقطة ق الخارجة عنه (شكل ٢٩٥)

نفرض ان المسئلة محلولة وان ق م هو المماس المطلوب تعيينه وان م هى نقطة تماسه المطلوب البحث عنها أيضا فاذا وصل نَ م ومدّ على استقامته وأخذ م ط = ن م يظهر أن معرفة نقطة ط كافية لتعيين نقطة م فنعتبرها اذن كأنها النقطة المطلوبة

وحيث ان نَ ط = ٢ ا فتوجد نقطة ط على الدائرة الدليلة للبورة ن ومن جهة أخرى حيث ان ق م منصف للزاوية ن م ط فيكون عمودا على وسط المستقيم ن ط قاعدة المثلث المتساوى الساقين ن م ط ويكون ق ط = ق ن وبذلك توجد نقطة ط على

محيط الدائرة الذى مركزه ن ونصف قطره نر واذن فتوجد فى تقاطع محيطى دائرتين معلومتين ولما كان هذان المحيطان يتقاطعان دائما فى نقطتين ط , طَ فتقبل المسئلة اذن حلين نم , نمَ

تنبيــه — من المفيد مناقشة شروط امكان حل هذه المسئلة فنقول

من المعلوم ان امكان حل المسئلة يتوقف على تقاطع المحيطين بمعنى أن يكون البعد بين مركزيهما رَن أصغر من مجموع نصفى القطرين ٢ا , نر وأكبر من فاضلهما

أولا — اذا لم تكن نقطة ن على المستقيم ررَ فانه يتأتى وجود المثلث نررَ ويحــدث

نرَ < ٢ح + نر < ٢ا + نر

ثانيا — اذا وجدت ن خارج القطع الناقص على امتداد ررَ تحصل

نرَ = نر ± ٢ح < نر + ٢ا

وبناء عليه يكون الشرط الاول محققا دائما كلما كانت نقطة ن خارجة عن ررَ

ثالثا — اذا كانت ن خارجة عن القطع الناقص وكان ٢ا > نر فمن المعلوم أن

نر + نرَ > ٢ا أو نرَ > ٢ا — نر

رابعا — اذا كان نر > ٢ا فان النقطة تكون خارج القطع الناقص ضرورة لانه يتحصل بداهة نر + نرَ > ٢ا فاذا لم تكن على امتــداد ررَ تحصل من المثلث نررَ أن

نرَ < نر — ٢ح < نر — ٢ا

خامسا — اذا وجدت ن على امتداد ررَ مع فرض أن نر < ٢ا تحصل

نرَ = نر ± ٢ح أو نرَ < نر — ٢ا

وبالجملة فكلما كانت ن خارجة عن القطع الناقص فان المحيطين يتقاطعان ويكون للمسئلة حلان

سادسا — اذا كانت ن على القطع الناقص تحصل نرَ = ٢ا — نر وهذا يدل على ان محيطى الدائرتين يتماسان وبذلك لا يكون للمسئلة الا حل واحد

سابعا — اذا كانت ن داخل القطع الناقص تحصل نرَ < ٢ا — نر وهذا يدل على تباعد المحيطين فى الداخل وبذا لا يكون للمسئلة حلول مطلقا

نظـــــرية

* (٣٧١) المستقيم الواصل بين نقطة تقاطع مماسين للقطع الناقص وبين احدى بورتيه
* ينصف الزاوية الواقعة بين نصفى القطرين البوريين الواصلين بين نقطتى التماس والبورة
* المذكورة (شكل ٢٩٥)

* ليكن ه م و ه مَ مماسى القطع الناقص الخارجين من نقطة ه والمطلوب البرهنة
* على أن المستقيم ه ر َ منصف للزاوية م رَ مَ يقال من المعلوم أن النقطتين ط و طَ
* المتحصلتين من الاعمال التى أجريت فى المسئلة المتقدمة هما متماثلتان بالنسبة للمستقيم
* ه رَ الواصل بين المركزين فاذا دار المثلث ه رَ ط حول ه رَ فان نقطة ط تنطبق
* على طَ وتقع الزاوية ط رَ ه على الزاوية ه رَ طَ وتكونان متساويتين وهو المطلوب

نظـــــرية

* (٣٧٢) الزاويتان الواقعتان بين مماسى القطع الناقص المخرجين من نقطة واحدة وبين
* المستقيمين الواصلين من هذه النقطة الى البورتين متساويتان (شكل ٢٩٥) أعنى أن
* زاوية م ه ر = مَ ه رَ

* وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين ه ط رَ و ه ر ك متساويان لتساوى أضلاعهما
* الثلاثة المتناظرة فيهما لان ه ط = ه ر و ط رَ = ر ك = ٢ا , ه رً = ه ك
* ومن تساويهما ينتج أن زاوية ط ه رَ = زاوية ر ه ك فاذا طرحنا منهما الزاوية
* المشتركة ر ه رَ تكون الزاويتان ط ه ر و رَ ه ك متساويتين واذن يكون
* نصفاهما م ه ر و مَ ه رَ كذلك وهو المراد

نظـــــرية

* (٣٧٣) محل رؤس الزوايا القائمة المرسومة على قطع ناقص هو محيط دائرة متحدة معه فى المركز
* ونصف قطره البعد الكائن بين نهايتى نصفى المحورين (شكل ٢٩٥)

* لتكن الزاوية م ه مَ قائمة فعلى مقتضى النظرية السابقة تكون زاوية ط ه رَ
* كذلك ويحدث

* $\overline{ر َط}^{٢} = \overline{ه ر َ}^{٢} + \overline{ه ط}^{٢}$ أو $٤ا^{٢} = \overline{ه ر َ}^{٢} + \overline{ه ر}^{٢}$

* لكن المثلث د م مَ يؤخذ منه أن
* دمَ² + دم² = ٢ح² − ٢دو² أو
* دو² = ٢أ² − ح² = ٢أ² − (أ² − ب²) = أ² + ب²

* نظـــــــرية

* (٣٧٤) حاصل ضرب بعدى كل واحدة من بورتى القطع الناقص عن مماسه ثابت دائما
* ومساو لمربع نصف المحور الاصغر (شكل ٢٩٦)
* اذا مررنا من نقطة ل المماسين ل ح و ل دَ
* للقطع الناقص وأنزلنا من البورتين م و مَ الاعمدة
* م ح و م د و مَ حَ و مَ دَ على هذين المماسين
* ووصلنا م ل و مَ ل فالمثلثان م ل ح و مَ ل دَ
* الحادثان يكونان متشابهين (٣٧٢) ويحدث
* م ح / مَ دَ = م ل / مَ ل وكذا المثلثان القائما الزاوية م ل د و مَ ل حَ فهما متشابهان لان
* زاوية م ل د أو م ل ح + ح ل د مساوية لزاويته مَ ل دَ + دَ ل حَ ويحدث
* م د / مَ حَ = م ل / مَ ل ومن هذا التناسب والسابق يتوصل الى م ح / مَ دَ = م د / مَ حَ أو
* م ح × مَ حَ = م د × مَ دَ
* أعنى أن حاصل ضرب العمودين ثابت وللوصول الى مقداره يقال اذا اعتبرنا الحالة
* الخصوصية التى يكون فيها المماس موازيا للمحور الاكبر فان كل واحد من العمودين يكون
* مساويا نصف المحور الاصغر ب ويحدث م ح × مَ حَ = ب² وهو المطلوب

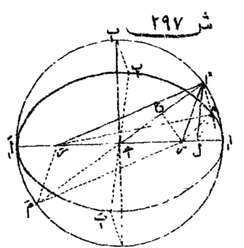
المبحث الرابـــــع

(فى مساحـــة القطـــع الناقص)

نظـــــــرية

(٣٧٥) مسقط الدائرة على مستو هو قطع ناقص (شكل ٢٩٧)

وللبرهنة على ذلك يقال حيث ان مسقطى أى شكل على مستويين متوازيين متساويان فنعتبر اذن مستوى المسقط مارا بمركز الدائرة وموازيا لمستوى المسقط المعلوم



ليكن أ ج أَ قطر الدائرة وخط تقاطعها بمستوى المسقط و ب ج بَ القطر العمودى عليه و ب ج بَ مسقطه فيكون عمودا على أ أَ ثم يوضع لاجل الاختصار ج أ = ج ب = ا و ج ب = ب و ب ب = ح ثم يؤخذ ج ں = ج ںَ = ب ب = ح فاذا اعتبرنا نقطة ما م من الدائرة وكان م مسقطها ووصلنا م ں و م ںَ فانا نبرهن على أن م ں + م ںَ = ٢ ا

وللوصول الى ذلك نمد القطر م ج مَ المساوى ٢ ا ثم المستقيمات م ں و م ںَ و مَ ں و مَ ںَ وننزل من البورة ں العمود ں ع على م مَ وننزل أيضا من نقطة م العمود م ل على ج أ ونصل م ل فالمثلثان ج م ل و ج ں ع يكونان متشابهين (٢١٣) ويحدث $\frac{ں ع}{م ل} = \frac{ح}{ا} = \frac{م م}{م ل}$ واذن يكون ں ع = م م ويكون المثلثان القائما الزاوية م ں م و م ں ع متساويين لمساواة وتر وضلع من أحدهما لنظيريهما من الثانى وينتج من تساويهما أن م ں = م ع

وأما المثلثان القائما الزاوية م ںَ م و مَ ں ع فهما متساويان أيضا لان فيهما الوترين ںَ م و ں مَ متساويان وفيهما الضلعان م م و ں ع كذلك وينتج من تساويهما أن م ںَ = مَ ع ويكون اذن م ں + م ںَ = م ع + مَ ع = ٢ ا وهو المطلوب

نتيجة ١ ــ البعد م ل يسمى بالاحداثى الرأسى لنقطة م وأما البعد ل ج فيسمى بالاحداثى الافقى لها وكذا يسمى البعد م ل بالاحداثى الرأسى لنقطة م والبعد ج ل يسمى باحداثيها الافقى وحيث ان التناسب $\frac{م ل}{م ل} = \frac{ب}{ا}$ الناتج من المثلثين المتشابهين م م ل و ب ب ج ثابت لاى نقطة مثل م من القطع الناقص أمكن أن يقال ان القطع الناقص يمكن استخراجه من الدائرة بواسطة تغيير احداثياتها الرأسية على نسبة واحدة

نتيجة ٢ ــ يمكن أن يستنتج من هذه النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الناقص لانا اذا تصورنا دوران مستوى القطع الناقص حول المحور أ أَ الى أن ينطبق على مستوى الدائرة فان المستقيم م ل ينطبق ضرورة على م ل و ب ج على ب ج وهكذا وحيث ان الابعاد

$م_١ ل$ و $ب_١ ج_١$ و الخ لا تتغير فى أثناء الدوران وبعده فتكون النسبة السابقة $\frac{م_١ ل}{م ل} = \frac{ب}{ا}$ ثابتة وبناء عليه يمكن أن يقال

اذا فرض قطع ناقص ودائرة متحدة معه فى المركز وقطرها مساو لمحوره الاكبر وأخذت نقطة على محيط كل منهما بحيث تكونان متحدتى المسقط على المحور الاكبر فتكون النسبة بين الاحداثى الرأسى لنقطة القطع الناقص و بين الاحداثى الرأسى لنقطة محيط الدائرة كالنسبة بين نصفى المحورين ب و ا

اذا تقرر هذا وأريد رسم القطع الناقص الذى محوراه $ا ا_١ = ٢ ا$ و $ج ء = ٢ ب$ (شكل ٢٩٨) فانا نرسم دائرتين متحدتى المركز بنصفى القطرين ا و ب ثم نأخذ نقطة ما $م_١$ مثلا على محيط الدائرة وننزل منها العمود $م_١ ل$ على المحور و ا ونصل $م_١$ و ثم نمد من نقطة $م_٢$ وهى تقاطع هذا المستقيم الواصل بمحيط الدائرة و $ج_١$ المستقيم $م_٢ م$ موازيا للمستقيم و ا فنقطة تقابله م بالعمود $م_١ ل$ تكون احدى نقط القطع الناقص لانه يحدث $\frac{م ل}{م_١ ل} = \frac{م_٢ و}{م_١ و} = \frac{ب}{ا}$

نتيجة ٢ — يمكن استنتاج كثير من خواص القطع الناقص مباشرة من اعتباره كأنه مسقط لمحيط دائرة فمماس القطع الناقص م ط هو مسقط مماس الدائرة $م_١$ ط وحينئذ فلايجاد مماس القطع الناقص يجب وصل نقطة ط بنقطة م

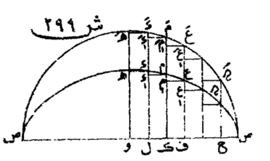
وكذلك لومد فى الدائرة جملة أوتار متوازية فيكون محل أواسط هذه الاوتار قطر الدائرة وعمودا على اتجاهها وحيث ان هذه الاوتار تسقط فى مستقيمات متوازية وأن أنصافها تسقط فى أنصاف مساقطها فيكون محل أواسط جملة أوتار متوازية فى القطع الناقص هو مستقيم يمر بمركزه

نظـــــرية

(٣٧٦) مساحة القطع الناقص تساوى حاصل ضرب نصفى محوريه فى النسبة التقريبية بين محيط الدائرة وقطره

وللبرهنة على ذلك نبدأ أولا بتقويم المساحة السطحية لجزء من القطع الناقص مثل ل ء ن ح محصور بين الرأسيين ء ل و ن ح و بين المحور (شكل ٢٩٩)

فنقول اذا قسمت المسافة ح ل الى جملة أجزاء متساوية وأقيم من نقط التقاسيم أعمدة على المحور الاكبر ومدت الى أن تلاقى محيط الدائرة الذى مركزه و ونصف قطره ا فى النقط ءَ و مَ و عَ و ... ڡَ ثم رسم من النقط م و ع و ڡ و مَ و عَ و ڡَ مستقيمات موازية للمحور الاكبر فانه يتكون من ذلك جملتان من المستطيلات متحدة جميعها فى القاعدة أما ارتفاعات الجملة الاولى فهى الاحداثيات



الرأسية للقطع الناقص وأما ارتفاعات الجملة الثانية فهى الاحداثيات الرأسية للدائرة وبناء على ماتقدم يحدث

$$\frac{ل ء م ك}{ل ءَ مَ كَ} = \frac{ك م ع ف}{ك مَ عَ فَ} = \dots = \frac{ب}{ا}$$

ثم اذا رمزنا بالحرف س₁ لمجموع المستطيلات المرسومة داخل جزء القطع الناقص و سَ₁ لمجموع المستطيلات المرسومة داخل جزء الدائرة تحصل $\frac{س_1}{سَ_1} = \frac{ب}{ا}$ ولما كان هذا التناسب حقيقيا مهما كان عدد الاقسام المنقسم اليها البعد ح ل فاذا فرضنا ازدياد عدد هذه الاقسام الى غير نهاية فمن المعلوم أن المجموع س₁ يقرب قربا كليا من مساحة جزء القطع الناقص س المطلوب تعيينها وأن المجموع سَ₁ يقرب أيضا قربا كليا من مساحة جزء الدائرة المناظرة لها سَ وحينئذ فيكون عند النهاية $\frac{س}{سَ} = \frac{ب}{ا}$

أعنى أن نسبة مساحة أى جزء من القطع الناقص محصور بين احداثيين رأسيين عمودين على محوره الى مساحة الجزء المناظر له من الدائرة المرسومة على هذا المحور كقطر لها كالنسبة بين نصفى المحورين وبناء عليه اذا علمت مساحة جزء الدائرة وعلم المحوران تيسر مع السهولة تقويم مساحة الجزء المذكور من القطع الناقص

اذا تقرر هذا يقال اذا فرض تباعد النقطتين ڡ و ء عن بعضهما الى أن تنطبقا على النقطتين ص و صَ فان جزء القطع الناقص يؤل الى نصفه وجزء الدائرة يؤل أيضا الى نصفه وبناء عليه يكون

$$\frac{\frac{1}{2} س}{\frac{1}{2} سَ} = \frac{\frac{1}{2} س}{\frac{1}{2} ط ا^2} = \frac{ب}{ا} \text{ او } س = ط ا ب$$ وهو المراد

الفصـــل الثـانى

(فى القطـــع المكافئ)

تعـاريف

(٣٧٧) القطع المكافئ هو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن مستقيم ثابت أيضا (شكل ٣٠٠)

النقطة الثابتة تسمى بورة القطع المكافئ والمستقيم الثابت يسمى دليله ويرمز هنا للبورة بالرمز ب بعد أى نقطة من نقط القطع المكافئ عن البورة يسمى نصف قطر بورى ويرمز له هنا بالحرف ص

(٣٧٨) تعريف مماس القطع المكافئ هو عين تعريف مماس القطع الناقص (نمرة ٣٦١)

(٣٧٩) العمود الغير المحدود النازل من بورة القطع المكافئ على دليله يسمى محوره

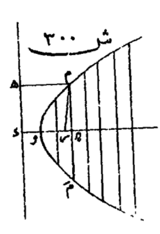
المبحث الاول

(فى رسم القطـــع المكافئ)

عمليـــة

(٣٨٠) المطلوب رسم القطع المكافئ

الطريقة الاولى ـ وهى طريقة رسمه نقطة فنقطة (شكل ٣٠٠)



اذا علمت بورة المنحنى ودليله فانه ينزل من البورة ب العمود ب ى على الدليل المعلوم فتكون و وسط البعد ب ى احدى نقط المنحنى على مقتضى التعريف (٣٧٧) ثم اذا أخذت نقطة ما ق على المحور ب ى وأقيم منها عمود غير محدود وجعلت نقطة ب مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو ق ى فانه يقطع العمود المذكور فى نقطتين م و مَ تكونان من نقط المنحنى لان م هـ = ق ى = ب م

لكنه لاجل أن يقطع محيط الدائرة المذكورة العمود ن م يجب أن يكون ر ء > ء ن وإذن فيجب أن تكون نقطة ن على عين نقطة و

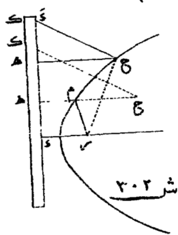
نتيجة — يظهر من طريقة رسم المنحنى هذه أنه يمتد الى غير نهاية فى الاتجاه ء ر وأنه موجود بتمامه فى جهة واحدة من الدليل

الطريقة الثانية — وهى طريقة أخرى لرسم المنحنى نقطة فنقطة (شكل ٣٠١)

يمد مستقيم كيفما كان ع ك موازيا ء ر ويوصل نقطة ر بنقطة هـ تقاطع المستقيم ع ك بالدليل ثم يقام من نقطة ح وسط المستقيم ر هـ عمود عليه فيقابل ع ك فى نقطة م تكون احدى نقط المنحنى وسيذكر فيما يأتى أن ح م يكون مماسا للمنحنى وحينئذ يكون لهذه الطريقة فائدة أخرى

يؤخذ من طريقة رسم المنحنى هذه أولا أنه يأخذ فى التباعد عن المحور ر ء الى غير نهاية حيث ان ء هـ غير محدود وثانيا أن م هـ يكون أكبر من ½ ر هـ وإذن فيزداد الى غير نهاية وبذلك يمتد المنحنى الى غير نهاية فى الاتجاه ء ر

الطريقة الثالثة — وهى طريقة رسمه دفعة واحدة (شكل ٣٠٢)



نضع حافة مسطرة بطول الدليل ونطبق أحد ضلعى القائمة من مثلث خشبى ع هـ ك قائم الزاوية على حافة المسطرة كما يظهر ذلك من الشكل ثم يثبت أحد طرفى خيط طوله مساو ع هـ فى رأس المثلث ع ويثبت طرفه الآخر فى البورة ر ثم نزلق المثلث حتى يصير الخيط مشدودا فى الاتجاه ر ع فتكون نقطة ع من نقط القطع المكافئ ثم يحرك المثلث بعد ذلك ويشد الخيط بواسطة سن قلم راسم متكئا على هـ ع فيرسم قوسا من القطع المكافئ لانه اذا كان ع هـ ك أحد أوضاع المثلث ونقطة م محل سن القلم فيكون ع م ر مساويا لطول الخيط ويكون م هـ = م ر

واستعمال هذه الطريقة قليل جدا حيث لا يتوصل بها الا الى منحنى صغير قريب من البورة

المبحث الثانى

(فى بعض نظريات مهمة)

نظرية

* (٣٨١) كل نقطة مفروضة داخل القطع المكافئ تكون أقرب للبورة من الدليل وكل نقطة خارجة عنه تكون بعكس ذلك (شكل ٣٠٣)

* الاول — لتكن ن نقطة داخله القطع المكافئ و ن س و ن هـ بعديها عن البورة وعن الدليل و م نقطة تقابل ن هـ بالمنحنى فيحدث

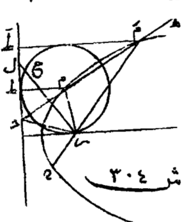
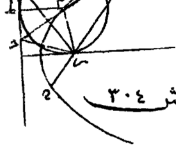
* ن س < ن م + م س أو
* < ن م + م هـ أو < ن هـ

* الثانى — لتكن ل خارجة عنه و ل س و ل هـ بعديها عن البورة والدليل و م نقطة تقابل امتداد ل هـ بالمنحنى فيحصل ل س > م س — م ل أو > م هـ — م ل أو > ل هـ

* وهو المراد

عملية

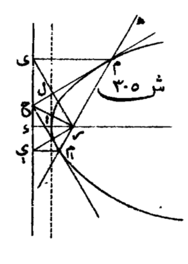
* (٣٨٢) اذا علم من القطع المكافئ بورته ودليله والمطلوب تعيين نقط تقاطعه بمستقيم معلوم بدون رسم المنحنى (شكل ٣٠٤)

* يقال نفرض أن المسئلة محلولة وأن م هى احدى نقط تقاطع المستقيم حـ هـ بالمنحنى وأن م س نصف القطر البورى لنقطة م و م ط العمود النازل منها على الدليل فاذا جعلت م مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو م س فانه يمس الدليل فى نقطة ط واذن فتعيين نقطة م يتوقف على حل المسئلة الآتية

* وهى

* المطلوب امرار محيط دائرة بنقطة معلومة ويكون مماسا لمستقيم معلوم ويكون مركزه موجودا
* على مستقيم آخر معلوم
* لكنا اذا بحثنا عن نقطة ع المماثلة للبورة ر بالنسبة للمستقيم المعلوم فتكون موجودة
* ضرورة على المحيط المذكور وبناء عليه فيرجع الامر الى حل المسئلة الآتية وهى
* المطلوب امرار محيط دائرة بنقطتين معلومتين ويكون مماسا لمستقيم معلوم فاذا مد رع على
* استقامته الى أن يلاقى الدليل فى نقطة ل وبحثنا عن الوسط المتناسب لط بين لع و لر
* ووضعناه بجانبى نقطة ل فاننا نتوصل الى النقطتين ط و طَ ثم اذا مد منهما مستقيمان
* موازيان للمحور تحصل نقطتا التقاطع م و مَ المطلوبتان
* نتيجة — حيث انه لايمكن وجود غير النقطتين ط و طَ فيستنتج من ذلك أن المستقيم
* لايقابل المنحنى فى أكثر من نقطتين وبذلك يكون محدبا
* تنبيه ١ — اذا وقعت نقطة ع على الدليل فان النقطتين ط و طَ أو م و مَ
* تتحدان معا وبناء عليه يكون المستقيم هـ ح مماسا للقطع المكافئ وأما اذا وقعت نقطة
* ع على شمال الدليل فيدل ذلك على ان المستقيم هـ ح لايقابل المنحنى
* تنبيه ٢ — اذا وازى المستقيم رع الدليل فانه لايوجد الا محيط واحد مار بالنقطتين
* ومماس للدليل واذن فلا يوجد الا نقطة تقاطع واحدة م ثم اذا دار المستقيم ح هـ حول
* نقطة م وأخذ فى التقرب شيأ فشيأ من أن يكون موازيا للمحور فان نقطة ل أو بالتبعية لها
* نقطة ط تنتقل على الدليل وتأخذ فى التباعد الى غير نهاية وبناء عليه فتبعد نقطة م الى
* غير نهاية عن المنحنى
* تنبيه ٣ — اذا مر المستقيم ح هـ بالبورة فانه لايتوصل بالاعمال المتقدمة الى ايجاد
* نقطتى التقاطع غير أننا للوصول اليهما فى هذه الحالة
* نقول (شكل ٣٠٥)



* اذا كانت م احدى نقطتى التقاطع وأنزلنا منها
* العمود م ى على الدليل وجعلت مركزا ورسم محيط
* دائرة بنصف قطر مساو م ر فانه يكون مماسا للدليل
* فى نقطة ى ثم اذا أقيم من نقطة ر العمود رع
* على المستقيم رم فيكون مماسا أيضا لمحيط الدائرة
* المذكورة واذن يكون ع ر = ع ى وبناء عليه فانه

* يسهل تعيين نقطة ى ومنها تتعين نقطة م وبأخذ البعد حم = حى فانها تتعين
* أيضا نقطة م وهى النقطة الثانية لتقاطع المستقيم حه بالقطع المكافئ

* نظـــــــــرية

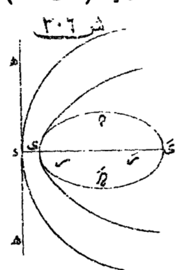
* (٣٨٣) نصف القطر البورى لنقطة تماس مستقيم بقطع مكافئ عمود على المستقيم الواصل
* بين البورة ونقطة تلاقى المستقيم المماس بالدليل (شكل ٣٠٤)
* ليكن م مَ قاطعا المنحنى و ح نقطة تقابله بالدليل فاذا أنزل من النقطتين م و مَ عمودان
* على الدليل م ط و مَ طَ حدث

* $$\frac{\text{م ح}}{\text{مَ ح}} = \frac{\text{م ط}}{\text{مَ طَ}} = \frac{\text{م ر}}{\text{مَ ر}}$$

* ومن هنا يعلم أن المستقيم ر ح منصف للزاوية م ر ق
* وحينئذ اذا أخذت نقطة مَ فى التقرب شيأ فشيأ من نقطة م الى غير نهاية فان القاطع
* يقرب من أن يكون مماسا للمنحنى فى نقطة م على مقتضى التعريف وتقرب زاوية م ر ق
* من القائمتين أو تقرب زاوية م ر ح من القائمة وهو المطلوب

* نظـــــــــرية

* (٣٨٤) القطع المكافئ هو النهاية التى يقرب منها قطع ناقص يزداد محوره الاكبر شيأ فشيأ
* الى غير نهاية بينما تكون احدى بورتيه والرأس المجاورة لها ثابتتين (شكل ٣٠٦)



* وللبرهنة على ذلك يقال ليكن ى ق ىَ قَ
* قطعا ناقصا و ر و رَ بورتيه و ى ىَ
* محوره الاكبر فاذا رسمت الدائرة الدليلة للبورة
* ر تكون جميع نقط المنحنى على أبعاد متساوية
* من محيط هذه الدائرة ومن البورة
* ثم اذا فرض بقاء البورة ر والرأس ى ثابتتين
* وفرض تزايد نصف المحور ا الى غير نهاية فان
* محيط الدائرة الذى قطره ٢ ا يأخذ فى الكبر
* شيأ فشيأ الى غير نهاية ويقرب من أن يتحد مع المماس له فى نقطة ء وبناء عليه فيأخذ القطع

* الناقص من التقرب الى غير نهاية نحو المحل الذى نقطه متساوية البعد عن البورة ر ومن
* المستقيم هـ هـَ أعنى نحو القطع المكافئ الذى بورته ر ودليله هـ هـَ وهو المطلوب
* تنبيه - يجب لادراك هذه النظرية جيدا أن يتصور نقطة على القطع الناقص متغيرة
* وموضوعة على بعد معين من البورة ر فمن المعلوم أن وضع هذه النقطة يتغير كلما حصل
* تكييف فى شكل القطع الناقص المتحرك وتقرب الى غير نهاية من احدى نقط القطع المكافئ
* الثابت الذى بورته ر ودليله هـ هـَ
* نتيجة - ينتج مما ذكر أن جميع خواص القطع المكافئ يمكن استنتاجها من الخواص
* المناظرة لها من القطع الناقص بناء على الاعتبار المتقدم

---

* المبحث الثالث

* فى تماس القطع المكافئ

---

* نظرية

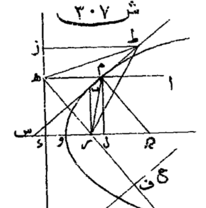
* (٣٨٥) مماس القطع المكافئ ينصف الزاوية الواقعة بين نصف القطر البورى لنقطة
* التماس والمستقيم المار بنقطة التماس موازيا للمحور (شكل ٣٠٥)
* أعنى ان المماس م ح ينصف الزاوية ر م ى
* وللبرهنة على ذلك يقال حيث ان زاوية ح ر م قائمة (٣٨٣) يكون المثلثان القائما
* الزاوية ح ر م و ح ى م متساويين لان فيهما الوتر ح م مشترك بينهما والضلع
* ح ر = ح ى وتكون زاوية ر م ح = ح م ى وهو المراد
* نتيجة ١ - اذا أريد مد مماس للقطع المكافئ من نقطة عليه يكفى أن يرسم نصف القطر
* البورى لها ويمد منها مستقيم يوازى المحور ثم تنصف الزاوية الحادثة بينهما
* نتيجة ٢ - اذا وصل المستقيم ر ى فمن حيث ان كل واحدة من النقطتين م و ح
* على بعدين متساويين من نهايتى هذا المستقيم تكونان موجودتين على العمود القائم على وسطه
* واذن فتكون نقطة ل مسقطا للبورة ر على المماس م ح وهى وسط ى ر وحيث
* ان نقطة ا وسط البعد ر د أمكن أن يقال ان محل مساقط البورة على المماس هو العمود
* المقام على المحور من رأس المنحنى

* نتيجة ٣ — اذا أخذت نقطة م في التقرب شيأ فشيأ من نقطة ا فان زاوية ى م ر
* تقرب من القائمتين و يقرب المستقيم المنصف م ع من أن يكون عمودا على المحور واذن
* فيكون مماس المنحنى في رأسه عمودا على المحور

* نتيجة ٤ — يسهل مشاهدة تساوي الابعاد ع ر و ع ى و ع ى١ على الشكل وقيام
* الزاوية م ع م١ واذن فمحل رؤس الزوايا القائمة المرسومة على القطع المكافئ هو الدليل

* نظرية

* (٣٨٦) تحت العمود (الرأسي) في القطع المكافئ كمية ثابتة ومساوية نصف القطر البوري
* العمودي على المحور (شكل ٣٠٧)



* اذا مد من نقطة م احدى نقط القطع المكافئ
* مماس له م س وأنزل منها العمود م ل على
* المحور وأقيم م ن عمودا على المماس ومد حتى
* يلاقي المحور في نقطة ن فيكون البعد ل ن
* هو ما يسمى بتحت العمود (الرأسي) ثم اذا وصل
* م ر وأنزل م هـ عمودا على الدليل و وصل
* ر هـ فيكون هذا المستقيم عمودا على المماس
* بناء على النظرية السابقة واذن فيكون موازيا للعمود المنحنى م ن وبناء عليه يكون الشكل
* م هـ ر ن متوازي أضلاع ويحدث
* ر ن = م هـ = ى ل أو ر ن — ر ل = ى ل — ل ر أو ل ن = ر ى
* ويرمز عادة لهذا البعد ر ى بالحرف ع ويكون تحت العمود = ع وأما مساواته للبعد
* ر ى بالاحداثي الرأسي ر ب المقابل للبورة أو الوتر البوري فهو ظاهر وبذلك يثبت المطلوب

* نظرية

* (٣٨٧) تحت المماس في القطع المكافئ يساوي ضعف الاحداثي الافقي لنقطة التماس
* (شكل ٣٠٧)
* الاحداثي الافقي لاي نقطة مثل م هو البعد و ل المحصور بين رأس المنحني و وبين

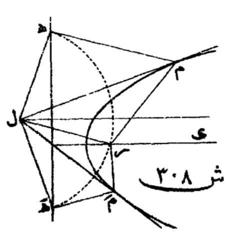
* موقع الاحداثى الرأسى ل للنقطة المذكورة وأما تحت المماس فهو البعد ل س المحصور
* بين موقع الاحداثى الرأسى لنقطة التماس و بين نقطة تقابل المماس بالمحور
* اذا تقرر هذا يقال ان المثلث م ر س متساوى الساقين لتساوى زاويتين منه على مقتضى
* الخواص الاصلية للمماس و يكون ر س = ر م = م هـ = ل ى وبناء عليه يكون
* ر ل = ى س وحيث ان و ر = و ى تكون نقطة و وسط البعد ل س و يكون
* ل س = ٢ و ل وهو المراد

* نظـــــــرية

* (٣٨٨) الاحداثى الرأسى لأى نقطة من القطع المكافئ وسط متناسب بين الاحداثى الافقى
* لها و بين الوتر البورى (شكل ٣٠٧)
* ليكن م س مماسا للقطع المكافئ و م ل الاحداثى الرأسى لنقطة التماس م و م ن رأس
* المنحنى فى نقطة م فانه يتحصل من المثلث القائم الزاوية م ن س ان $\overline{\text{م ل}}^{2}$ = ل س × ل ن
* وبناء على النظرية السابقة يحدث
* $\overline{\text{م ل}}^{2}$ = ٢ و ل × ع = ٢ ع × و ل وهو المراد
* تنبيـــه ـ يرمز عادة بالحرف س للاحداثى الافقى لاى نقطة وبالحرف ص للاحداثى
* الرأسى لها فيحدث ص٢ = ٢ ع س ويسمى هـذا الارتباط بمعادلة المنحنى و يسمح برسمه
* نقطة فنقطه

* عمليـــــــة

* (٣٨٩) المطلوب رسم مماس للقطع المكافئ من نقطة خارجة عنه (شكل ٣٠٨)



* لتكن ل النقطة المفروضة خارج القطع
* المكافئ فاذا فرض أن المسئلة محلولة وأن ل م
* هو المماس المطلوب لزم البحث عن نقطة
* التماس م
* فاذا مد من هـذه النقطة نصف القطر البورى
* م ر وأنزل العمود م هـ على الدليل يشاهد
* أن معرفة نقطة هـ كافية لتعيين نقطة م

* بواسطة تقابل م هـ بالعمود ل م النازل من نقطة ل على ر هـ
* ولتعيين نقطة هـ يقال حيث ان ل هـ = ل ر بناء على ما تقرر (بنمرة ٣٨٥ نتيجة ٤)
* فتؤخذ نقطة هـ بناء على ذلك فى تقابل الدليل بمحيط الدائرة الذى مركزه ل ونصف قطره
* ل ر لكنه لما كان محيط الدائرة يقابل الدليل عموما فى نقطتين هـ و هـَ فيكون للمسئلة
* اذن على وجه العموم حلان ل م و ل مَ
* تنبيه ــ لاجل أن تكون المسئلة ممكنة يجب ويكفى أن يقابل محيط الدائرة الدليل وهذا
* يستلزم أن يكون بعد نقطة ل عن البورة أكبر من بعدها عن الدليل أعنى انها تكون خارجة
* عن المنحنى وأما اذا وجدت عليه فان الدائرة ل ر تكون مماسة للدليل وبذا يؤل الحلان
* الى واحد

عمليــــــــة

* (٣٩٠) المطلوب مد مماس للقطع المكافئ يكون موازيا لاتجاه معلوم (شكل ٣٠٧)
* ليكن ح ى الاتجاه المعلوم ونفرض ان المسئلة محلولة وان م ط هو المماس المطلوب لزم
* اذن البحث عن نقطة التماس م
* فاذا أنزلنا من نقطة م العمود م هـ على الدليل كانت معرفة نقطة هـ كافية لتعيين نقطة
* م على مقتضى خواص المماس المقررة وللوصول الى ذلك يقال
* اذا وصل ر هـ كان هذا المستقيم عمودا على المماس أو على الاتجاه المعلوم وبناء عليه فانه
* يكفى لتعيين نقطة هـ أن ينزل من نقطة ر عمود على الاتجاه المعلوم ويمد حتى يلاقى الدليل
* تنبيه ــ اذا تغير وضع الاتجاه ى ح وأخذ شيأ فشيأ الى غير نهاية فى القرب من أن يكون
* موازيا للمحور فان نقطة هـ تتباعد عن الدليل الى غير نهاية وكذا تتباعد نقطة ل عن
* مماس رأس المنحنى الى غير نهاية وأما نقطة م فانها تتباعد عن المنحنى الى غير نهاية أيضا
* فاذا صار ى ح موازيا للمحور فان نقطة هـ تنعدم ولا يكون للمنحنى مماس أو يكون مماسه
* موجودا على بعد لا نهائى

الفصـــــل الثـالث

(فى القطـــع الزائد)

تعـاريف

(٣٩١) القطع الزائد هو محل النقط التى يكون الفرق بين بعــدى كل واحدة منهـا عن نقطتــين ثابتتين فيه ثابتا دائمـا (شكل ٣٠٩)

النقطتان الثابتتان تسميان بورتى القطع الزائد ويرمز لهما بالرمزين ر و رَ

بعــد أى نقطة من نقط المحل عن أى واحدة من البورتين يسمى نصف قطر بورى ويرمز لنصفى القطرين البوريين لاى نقطـة بالحرفين ص و صَ ويرمز للفرق الثابت بين نصفى القطرين البوريين لاى نقطة بالمقدار ٢ ا وأما البعد بين البورتين فيرمز له بالمقدار ٢ حـ

(٣٩٢) تعريف مماس القطع الزائد هو عين تعريف مماس القطع الناقص

المبحث الاول

(فى رسـم القطـع الزائد)

عمليـــة

(٣٩٣) المطلوب رسم القطع الزائد

الطريقة الاولى ـ وهى طريقة رسمه نقطة فنقطة (شكل ٣٠٩)

لتكن ر و رَ بورتى القطع الزائد وليكن ٢ حـ البعد الكائن بينهما و ٢ ا الفرق الثابت المعلوم الذى يجب أن يكون أقل من ٢ حـ لان الضـلع ررَ أو ٢ حـ من المثلث م ر رَ أكبر من الفـرق بين الضلعين الآخرين م رَ ــ م ر أو أكبر من ٢ ا فاذا أخذ على المستقيم ررَ كل واحد من البعدين ر كَ و رَ ك مساو ٢ ا ونصف كل واحــد من ر ك و رَ كَ فانا نتوصل الى نقطتى ل و لَ من نقط المنحنى وذلك لان

لرَ ـ لر = رَك = ٢ا ، لَر ـ لَرَ = ركَ = ٢ا

ثم اذا فرضت نقطة مثـل ى على يمين نقطة ل وجعلت نقطة رَ مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو رَى ثم جعلت بعـد ذلك ر مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مسـاو رَى ـ ٢ا = كى فانه يقطع الاول فى النقطتين م و مَ وتكونان من نقط المنحنى لان

مرَ ـ مر = رَى ـ كى = ٢ا

ثم اذا غيرنا نصفى القطرين ببعضهما وركزنا فى البورتين ورسمنا محيطى دائرتين أخريين فاننا نتوصل الى نقطتين جديدتين ن و نَ

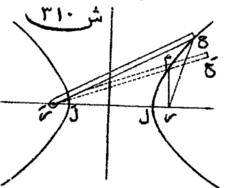
تنبيــه ـ لاجل ان يتقاطع محيطا الدائرتين يجب و يكفى أن يكون

أولا ررَ < رَى + كى وثانيا ررَ > رَى ـ كى

ومن ذلك يشاهد أن هذين الشرطين لا يتحققان الا اذا كانت نقطة ى على يمين نقطة ل وأما اذا انطبقت نقطة ى على ل فان المحيطين يتماسان وبذلك يتحد نقطتا م و مَ معا فى نقطة ل

نتيجــة ١ ـ ينتج مما ذكر أن محورى تماثل نقط المنحنى هـما ررَ والمستقيم ف فَ العمودى عليه والمار بنقطة و وسط ررَ

نتيجـة ٢ ـ حيث ان البعد رَل هو النهاية الصغرى للابعاد ىرَ فيتركب المحل اذا أولا من قسم ذى فرعين لانهائيين متماثلى الوضع بالنسبة للمستقيم ررَ وموضوعين على يمين ف فَ ثم انه بتغيـير نصفى القطرين يتوصـل ثانيا الى قسم آخر موضوع على شمـال ف فَ ومماثل للاول وبناء عليـه فيتركب المحل من جزأين خارجين عن المسافة المحصورة بين العمودين المقامين على ررَ من نقطتى ل و لَ



نتيجــة ٣ ـ حيث ان نقطة و مركز تماثل فتسمى لهذا السبب بمركز المنحنى

الطريقة الثانية ـ وهى طريقــة رسمه دفعــة واحدة (شكل ٣١٠)

اذا تصورنا نهـاية مسـطرة يدور حول البورة رَ وربطنا فى النهـاية الثانيــة ع لها خيطا ينقص طوله عن طول المسـطرة بالمقدار الثابت ٢ا وثبتنا طرفه الثانى فى البورة ر ثم أدرنا المسـطرة حول

البورة ر َ وشددنا الخيط بسن قلم راسم م مع انطباقه دائماً على المسطرة فانه يرسم قوساً من منحنى القطع الزائد لان

م ر َ — م ر = م ر َ + م ع — (م ر + م ع َ) = ع ر َ — ع ر = ٢ ا

المبحث الثانى

(فى بعض نظريات مهمة)

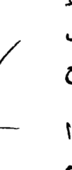
نظرية

(٣٩٤) القطع الزائد هو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن محيط دائرة ثابت أيضا (شكل ٣١١)

لتكن ر و ر َ بورتى القطع الزائد و ر َ هـ محيط الدائرة الثابت الذى مركزه ر َ ونصف قطره ٢ ا فاذا كانت م احدى نقط القطع الزائد تحصل بناء على التعريف أن

م ر َ — م ر = ٢ ا لكن م ر َ — م هـ = ٢ ا

فيكون م ر = م هـ واذن فتكون نقطة م على بعدين متساويين من البورة ر ومن محيط الدائرة ر َ هـ



وأما نقط الفرع الثانى فهى محققة أيضا لهذه الخاصية وذلك لانه اذا كانت م َ احدى نقط هذا الفرع تحصل م َ ر — م َ ر َ = ٢ ا وحيث ان

م َ هـ َ — م َ ر َ = ٢ ا يكون م َ ر = م َ هـ َ

الدائرة ر َ هـ تسمى بالدائرة الدليلة للبورة ر

تنبيه — يظهر من هذه النظرية ما بين القطع الناقص والقطع الزائد من قوة الارتباط واذا فيمكن اعتبار هذين المنحنيين كأنهما حالتان خصوصيتان لمحل واحد فالقطع الناقص يقابل الحالة التى تكون فيها ر داخل الدائرة الدليلة التى مركزها ر َ وأما القطع الزائد فانه يقابل الحالة التى تكون فيها ر خارجة عنها

نتيجة — يمكن أن يستنتج من هذه النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الزائد ويكون لها مزية أخرى وهى تعيين المماس ح م للنقطة المفروضة

نظرية

(٣٩٥) كل نقطة تفرض داخل القطع الزائد يكون الفرق بين نصفى قطريها البوريين أكبر من المحور القاطع وكل نقطة تفرض خارجة عنه يكون الفرق بين نصفى قطريها البوريين أقل من المحور المذكور (شكل ٣١٢)

ش ٣١٢

فرعا القطع الزائد يقسمان المستوى الى ثلاثة أقسام فيقال لأى نقطة انها داخل القطع الزائد متى وجدت مع احدى البورتين فى قسم منها ويقال لها خارجة عنه اذا لم يكن الامر كذلك

أولا — لتكن ن داخل القطع الزائد فنصل ن ر و ن رَ و م ر فيحدث

ن م + م ر > ن ر واذن يكون

ن م + م ر + م رَ > ن ر + م رَ أو ن رَ + م ر > ن ر + م رَ

ومن ذلك يمكن أن يستنتج أن

ن رَ — ن ر > م رَ — م ر أو > ٢ ا

ثانيا — اذا كانت ل خارجة فنصل ل رَ و ل ر و م رَ فيحدث

ل رَ < ل م + م رَ أو ل رَ + م ر < ل م + م ر + م رَ أو

ل رَ + م ر < ل ر + م رَ

ومن ذلك ينتج أن ل رَ — ل ر < م رَ — م ر أو < ٢ ا وهو المطلوب

عملية

(٣٩٦) المطلوب ايجاد نقط تقاطع مستقيم بمنحنى قطع زائد بدون رسم المنحنى

ليكن المعلوم من القطع الزائد بورتيه ر و رَ والفرق الثابت ٢ ا والمستقيم المعلوم س ص

* فاذا فرضنا ان المسئلة محلولة وان م هى احدى نقط تقابل المستقيم س ص بالمنحنى
* ثم ركزنا فى نقطة ر َ ورسمنا الدائرة الدليلة للبورة ر وركزنا أيضا فى نقطة م ورسمنا محيط
* دائرة بنصف قطر مساو م ر فيكون مماسا للمحيط الاوّل (٣٩٤) وبناء عليه فقد رجعنا
* الى عين الاعمال التى اجريت فى مثل هذه المسئلة فى القطع الناقص
* نتيجة — المستقيم لا يمكنه أن يقابل القطع الزائد فى أكثر من نقطتين وبذلك يكون المنحنى
* محدبا

* ## المبحث الثالث

* ### (فى تماس القطع الزائد)

* ### نظرية

* (٣٩٧) مماس القطع الزائد فى أى نقطة ينصف الزاوية المكونة من نصفى القطرين
* البورين لهذه النقطة (شكل ٣١٣)
* اذا كانت م احدى نقط القطع الزائد
* واعتبرنا القاطع م م َ س المار بهذه النقطة
* وباخرى م َ قريبة جدا من الاولى فعلى
* مقتضى الفرض يكون
* م ر َ — م ر = ٢ أ و م َ ر َ — م َ ر = ٢ أ
* فاذا عينا نقطة ع المماثلة للبورة ر بالنسبة
* للقاطع ووصلنا بينهما وبين ر َ بمستقيم
* ومددناه حتى يقابل القاطع فى نقطة ك فتكون هذه النقطة ممتازة بالاقل عن واحدة من
* النقطتين م و م َ ولتكن عن م َ مثلا فيحدث
* ع ر َ = ك ر َ — ك ر > م ر َ — م ع أو > م ر َ — م ر أو > ٢ أ
* واذن تكون نقطة ك داخلة القطع الزائد وممتازة عن النقطتين م و م َ وموضوعة
* على الوتر الجامع لهما وغير ذلك يشاهد أن القاطع منصف للزاوية المتكونة بين نصفى القطرين
* البورين ك ر َ و ك ر

اذا تقرر هذا وفرضنا ان نقطة مَ تقرب شيأ فشيأ الى غير نهاية من نقطة م فان نقطة ك تقرب أيضا نحو م وأما كرَ و كر فانهما ينتهيان بان ينطبقا على نصفي القطرين البوريين مرَ و مر وبناء عليه تكون نهاية القاطع ممَ هو المستقيم المنصف للزاوية رَمر وهو المطلوب

عمليــــــة

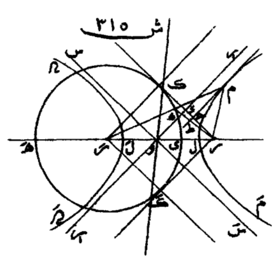
(٣٩٨) المطلوب مد مماس للقطع الزائد من نقطة مفروضة عليه (شكل ٣١٤)

لتكن م نقطة مفروضة على القطع الزائد ولتكن ر و رَ بورتيه ولكن ٢ا المحور القاطع فنمد نصفي القطرين البوريين مرَ و مر ثم نأخذ على مرَ البعد مهـ = مر وننزل من نقطة م العمود مط على هـر فيكون منصفا للزاوية رَمر وحينئذ يكون مماسا للقطع الزائد على مقتضى النظرية السابقة

ش ٣١٤

نتيجة — مماس القطع الزائد يوجد بتمامه بين فرعي المنحنى وذلك لانه اذا كانت ل نقطة ما من هذا المماس مغايرة لنقطة م فنصل بينها وبين النقط ر و هـ و رَ بمستقيمات فيحدث أن ل رَ ـ ل هـ = ل رَ ـ ل ر < رَ هـ أو < ٢ا واذن فتكون نقطة ل خارجه عن القطع الزائد وهو المطلوب

ولنبحث الآن عن الوضع النهائي لمماس القطع الزائد متى انتقلت نقطة تماسه على المنحنى وأخذت في التباعد الى غير نهاية (شكل ٣١٥)

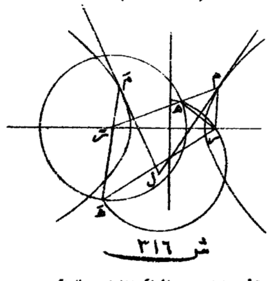


لتكن م نقطة من القطع الزائد فنرسم الدائرة الدليلة للبورة ر ونمد نصفي القطرين البوريين مرَ و مر ولتكن هـ نقطة تقابل مرَ بمحيط الدائرة والعمود مط النازل على هـر يكون مماسا للقطع الزائد في نقطة م ثم نمد من نقطة ر المماسين رك و ركَ لمحيط الدائرة الدليلة

* أولا ـ اذا كان وضع النقطة ﻫ فى ى على المستقيم ر رَ تكون نقطة م فى الوضع ل
* ويكون المماس عمودا على ر رَ
* ثانيا ـ اذا سارت نقطة ﻫ نحو ك فان نقطة م تصعد على منحنى القطع الزائد
* ويصنع المماس زاوية حادة مع المحور ر رَ
* ثالثا ـ اذا قربت نقطة ﻫ من أن تتحد مع نقطة ك فان ر ﻫ يقرب من أن يكون
* عمودا على رَ ﻫ وحينئذ فالعمود المقام على وسط ر ﻫ يقرب نحو و ى الموازى الى
* رَ ك واذن فتبعد نقطة التماس عن المنحنى الى غير نهاية
* وبالعكس اذا أخذت نقطة التماس فى التباعد عن المنحنى الى غير نهاية يكون الوضع النهائى
* للماس هو المستقيم و ﻫ١ الذى يمر بالمركز ولا يقابل المنحنى ويسمى هذا المستقيم الشهير
* بالخط التقربى للمنحنى
* يظهر من تماثل المنحنى ان و ﻫَ١ امتداد المستقيم و ﻫ١ هو خط تقربى وان المستقيم و س
* المماثل للمستقيم و ﻫ١ بالنسبة للمحور هو خط آخر تقربى
* يؤخذ من المثلث و ى ر أن و ى = $\frac{1}{2}$ رَ ك = ا = و ل
* وهذه المحوظة يتوصل بها الرسم الخطين التقربيين لقطع زائد معلوم مع السهولة

عمليـــــة

* (٣٩٩) المطلوب مد مماس للقطع الزائد من نقطة خارجة عنه (شكل ٣١٦)
* لتكن ل النقطة المعلومة بين فرعى المنحنى
* فنفرض ان المسئلة محلولة وان ل م هو
* المماس المطلوب فيلزم البحث عن نقطة
* التماس م
* ولذلك يقال اذا رسمنا الدائرة الدليلة للبورة ر
* وكانت ﻫ نقطة تقابل محيط هذه الدائرة
* بنصف القطر البورى م رَ فمن المعلوم ان
* نقطة م تتعين اذا علم وضع نقطة ﻫ لكنه



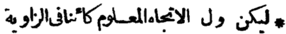
شـ ٣١٦

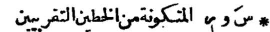
* حيث كان ل ر = ل ﻫ تكون نقطة ﻫ موجودة فى تقابل محيط الدائرة الدليلة بالدائرة
* التى مركزها ل ونصف قطرها ل ر

* وهاتان الدائرتان تتقاطعان عموما فى نقطتين هـ , هـَ فيكون اذن للمسئلة حلان
* ل م , ل مَ
* تنبيه – لاجل أن تقبل المسئلة هذين الحلين يجب ويكفى تقاطع محيطى هاتين الدائرتين
* وهذا يستلزم أن يكون البعد بين المركزين ل رَ أقل من مجموع نصفى القطرين ٢ا , ل ر
* وأكبر من فاضلهما
* أولا – اذا كانت ل من فرعى المنحنى وليست على المستقيم ر رَ فان النقط الثلاثة
* ل , ر , رَ يتكون منها مثلث يحدث منه أن
* ل رَ + ل ر > ٢ج > ٢ا (١)
* فاذا كان ل رَ أقل من ل ر مع وجود نقطة ل خارجة حدث
* ل ر – ل رَ < ٢ا (٢)
* ويحدث بداهة أن ل رَ < ل ر + ٢ا (٣)
* واذا كان ل رَ أكبر من ل ر بفرض أن نقطة ل خارجة حدث
* ل رَ – ل ر < ٢ا (٤)
* ويحدث بداهة أن ل ر < ل رَ + ٢ا (٥)
* ينتج من الارتباطات (١) و(٢) و(٣) أن ل رَ أصغر من مجموع نصفى القطرين
* وأكبر من فاضلهما
* وينتج ماذكر أيضا من الارتباطات (١) و(٤) و(٥)
* ثانيا – اذا كانت ل موجودة على ر رَ بين رأسى المنحنى فان الارتباطات (١) و(٢)
* و(٣) و(٤) و(٥) تتحقق وتقبل المسئلة حلين
* ثالثا – اذا كانت نقطة ل على المنحنى يحصل ل رَ = ل ر + ٢ا وحينئذ تماس
* الدائرتان وبذلك يتحد المماسان معا
* رابعا – اذا وجدت نقطة ل على أحد الخطين التقربيين فان أحد المماسين ينطبق على
* هذا الخط التقربى وتكون نقطة التماس على بعد لانهائى
* خامسا – اذا انطبقت نقطة ل على مركز المنحنى فان المماسين ينطبقان على الخطين
* التقربيين
* سادسا – اذا وجدت نقطة ل داخل المنحنى وفى جهة واحدة مع البورة ر حدث
* ل رَ – ل ر > ٢ا وحينئذ يكون المحيطان متباعدين وبذلك لا يكون للمسئلة حلول

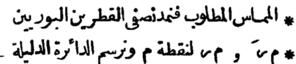
عمليـــــة

(٤٠٠) المطلوب مد مماس للقطع الزائد يكون موازيا لاتجاه معلوم (شكل ٣١٧)


ليكن و ل الاتجاه المعلوم كائنا فى الزاوية


سَ و ص المتكونة من الخطين التقريبين

فاذا فرض أن المسئلة محلولة وأن م ط هو

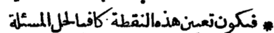

المماس المطلوب فنمد نصفى القطرين البوريين

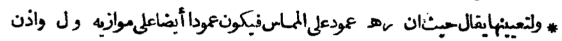
م ر َ و م ر لنقطة م ونرسم الدائرة الدليلة

للبورة ر فتكون نقطة هـ وهى تقابل

الدائرة الدليلة بنصف القطر البورى م ر َ

مماثلة لنقطة ر بالنسبة للمماس وحينئذ


فيكون تعيين هذه النقطة كافيا لحل المسئلة

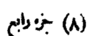

ولتعيينها يقال حيث ان ر هـ عمود على المماس فيكون عمودا أيضا على موازيه و ل واذن فتتعين نقطة هـ بتقاطع الدائرة الدليلة للبورة ر مع العمود النازل من نقطة ر على الاتجاه المعلوم

وحيث ان هذين المحلين يتقاطعان عموما فى نقطتين فيكون اذن على وجه العموم للمسئلة حلان ط م و طَ مَ

تنبيه ـ اذا فرضنا أن الاتجاه المعلوم و ل يدور حول نقطة و ليقرب من الخط التقربى و ص فان العمود ر ك والحلين م ط و مَ طَ يقربان نحو الخط التقربى ص صَ

واذا استمر و ل فى دورانه وأخذ الوضع و م فان العمود المنزل من نقطة ر على و ل لا يقابل الدائرة الدليلة وبذلك لا يكون للمسئلة حلول

وينتج من هذه المناقشة أن الاتجاه و ل يجب أن يكون محصورا فى زاوية الخطين التقربيين سَ و ص

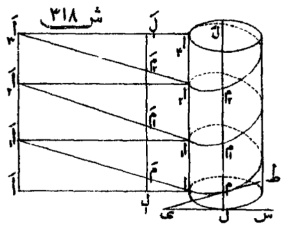


الفصل الرابع

(فى المنحنى البريمى)

تعريف

(٤٠١) المنحنى البريمى هو المتولد من تحرك نقطة على سطح اسطوانى تحركاً بحيث يكون بعدها عن قاعدتها مناسبا للقوس المحصور بين الوضع الابتدائى للراسم وبين وضعه المار بها



فاذا تصورنا تحرك النقطة م مثلا على سطح اسطوانى تحركى (شكل ٣١٨) وكان بعدها فى كل لحظة عن قاعدة الاسطوانة م ل مثلا مناسبا للقوس ا ل المحصور بين الوضع الابتدائى للراسم وبين وضعه المار بنقطة م المتحركة فان المنحنى المتولد من ذلك يسمى منحنيا بريميا

ومن المعلوم أنه متى وصلت النقطة المتحركة م الى الوضع الابتدائى للراسم فى نقطة ا فان النقطة ل تكون قد أتمت مرورها على محيط دائرة القاعدة ويسمى البعد م ل بالاحداثى الرأسى للنقطة المتحركة فى الوضع م وأما البعد ا ا فيسمى بخطوة البريمة وأما قوس المنحنى البريمى المحصور بين نقطة ا ونقطة ا فيسمى بلفة المنحنى البريمى

ثم اذا جعل س رمزا لنصف قطر قاعدة الاسطوانة و ع للاحداثى الرأسى للنقطة المتحركة و هـ للقوس ا ل و ح لخطوة البريمة تحصل على مقتضى التعريف

$$\frac{ع}{ح} = \frac{هـ}{٢ ط س} \quad \text{ومنه} \quad ع = \frac{ح}{٢ ط س} \times هـ$$

نظرية

(٤٠٢) يمكن اعتبار المنحنى البريمى كأنه متولد من مستقيم موجود فى مستو يلتف على اسطوانة (شكل ٣١٨)

لذلك يمد مستو ما بالراسم ا ا َ ويرسم عليه المستطيل ا ا َ اَ ا بحيث تكون قاعدته مساوية لطول محيط دائرة قاعدة الاسطوانة ثم نقسم الارتفاع ا َ ا الى جملة أقسام متساوية ثلاثة مثلا ونمد المستقيمين ا ا َ و ا ا َ موازيين للقاعدة ونصل الاقطار ا َ ا و ا ا و ا َ ا ثم نمد مستقيما ما ل ل َ موازيا الى ا ا وقاطعا للاقطار فى النقط م َ و م َ و م َ فيحدث

$$\frac{م َ ل}{ا ا} = \frac{ا ل}{ا ا} \quad \text{واذن يكون} \quad م َ ل = \frac{ا َ ا}{٢ ط س} \times ا ل$$

وحينئذ يكون م َ ل احداثيا رأسيا المنحنى بريمى يكون ا َ ا خطوة له لان ا ل يدل على قوس من محيط القاعدة وبناء عليه اذا التف المستطيل ا ا َ ا على الاسطوانة فان المستقيم ا ا يلتف على محيط القاعدة والمستطيل على السطح الجانبى للاسطوانة والقطر ا ا َ يلتف على لفة البريمة ا م ا حيث ان احدى نقط هذا القطر م َ تنطبق على نقطة مناظرة لها من لفة البريمة وأما باقى الاقطار فانها تتمم المنحنى

* نظـــــــــرية

* (٤٠٣) الزاوية التى يصنعها راسم المنحنى البريمى مع راسم الاسطوانة ثابتة دائما (شكل ٣١٨)
* وللبرهنة على ذلك نفرض نقطة ما م ً قريبة جدا من نقطة م وليكن م ً ل ً احداثيها
* الرأسى فالمستقيمان م م ً و ل ل ً يتقاطعان فى نقطة ى َ ويكون

$$* \quad \frac{م ل}{ا ل} = \frac{م ً ل ً}{ا ل ً} = \frac{م ل}{ى َ ل} = \frac{م ً ل ً}{ى َ ل ً}$$

$$* \text{ واذن يكون} \quad \frac{ى َ ل}{ا ل} = \frac{ى َ ل ً}{ا ل ً} = \frac{\text{وتر ل ل ً}}{\text{قوس ل ل ً}}$$

* فاذا قربت م ً من م فان النسبة بين الوتر وقوسه تقرب من الوحدة وبناء عليه يكون

$$* \quad \text{نهاية ى َ ل} = \text{ى ل} = \text{قوس ا ل}$$

* والخط ى ل يسمى تحت المماس وحينئذ فيكون تحت المماس لاى نقطة من منحن بريمى
* مساويا للقوس القاعدة المقابل لهذه النقطة
* فاذا أخذ على المستطيل ا ا َ ا البعد ا ل = ا ل يكون الاحداثى الرأسى م َ ل
* مساويا م ل واذن فيكون المثلث م َ ل ا مساويا للمثلث م ل ى وبناء عليه فيصنع
* المماس زاوية ثابتة م َ ا ا مع الراسم وهو المراد

* تنبيه — ماذكرناه يتوقف على أن النسبة بين قوس ووتره تكون نهايتها الوحدة متى صغر
* القوس وأخذ فى القرب من الصفر

الفصل الخامس

تمرينات

١ — المطلوب رسم القطع الناقص اذا علم منه

أولا — بورة ومماسان واحدى نقطه

ثانيا — بورة ومماسان واحدى نقطتى التماس

ثالثا — بورة ومماس واحد ونقطة تماسه واحدى نقط المنحنى

رابعا — بورة ورأس ونقطة من نقطه

خامسا — بورة وثلاث نقط من نقطه

* ٢ — المطلوب رسم القطع المكافئ اذا علم منه
* أولا — البورة ومماسان
* ثانيا — الدليل ومماسان
* ثالثا — البورة ومماس ونقطة تماسه
* رابعا — الدليل ومماس ونقطة تماسه
* خامسا — البورة ومماس واحدى نقط المنحنى
* سادسا — الدليل ومماس واحدى نقط المنحنى
* سابعا — البورة ونقطتان من نقط المنحنى
* ثامنا — الدليل ونقطتان من نقط المنحنى
* ٣ — المطلوب معرفة المحل الذى ترسمه احدى نقط مستقيم ذى طول ثابت تنزلق نهايتاه على
* ضلعى زاوية قائمة

(تم)

(فهرست الجزء الرابع من كتاب التحفة البهية)

(تمت الفهرست)

